Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Semigrupos numéricos

Rosa Cristina Martins Cordeiro de Jesus Bértolo

Orientador: Manuel Baptista Branco

(Professor Auxiliar da UE)

Dissertação de Mestrado

em Matemática para o Ensino

pela Universidade de Évora

Abril de 2010

Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Semigrupos numéricos

Dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino

Rosa Cristina Martins Cordeiro de Jesus Bértolo

Orientador: Manuel Baptista Branco

(Professor Auxiliar da UE)

Departamento de Matemática

Universidade de Évora

Abril de 2010

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Manuel Branco, meu orientador, o meu sincero agradecimento pela disponibilidade, pelo apoio científico e pela revisão cuidada deste trabalho.

À minha colega Helena pelo incentivo e pela amizade que me dedicou.

Aos meus filhos pela compreensão e apoio...

Numerical semigroups

Abstract

A numerical semigroup is a submonoid of $(\mathbb{N}, +)$ such that its complement of $\mathbb{N}$ is finite. In this work we study some invariants of a numerical semigroup S such as: multiplicity, embedding dimension, Frobenius number, gaps and Apéry set of S. We characterize a minimal presentation of a numerical semigroup S and describe an algorithmic procedure which allows us to compute a minimal presentation of S. We define an irreducible numerical semigroup as a numerical semigroup that cannot be expressed as the intersection of two numerical semigroups properly containing it. Concluding this work, we study and characterize irreducible numerical semigroups, and describe methods for computing decompositions of a numerical semigroup into irreducible numerical semigroups.

Semigrupos numéricos

Resumo

Um semigrupo numérico é um submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ tal que o seu complementar em $\mathbb{N}$ é finito. Neste trabalho estudamos alguns invariantes de um semigrupo numérico S tais como: multiplicidade, dimensão de imersão, número de Frobenius, falhas e conjunto Apéry de S. Caracterizamos uma apresentação minimal para um semigrupo numérico S e descrevemos um método algorítmico para determinar esta apresentação. Definimos um semigrupo numérico irredutivel como um semigrupo numérico que não pode ser expresso como intersecção de dois semigrupos numéricos que o contenham propriamente. A finalizar este trabalho, estudamos os semigrupos numéricos irredutíveis e obtemos a decomposição de um semigrupo numérico em irredutíveis.

Índice

Introdução

Ao longo do ensino básico e secundário, o estudo dos números, e em especial o dos inteiros, ocupa uma grande parte do currículo da Matemática. De facto, os números inteiros estão omnipresentes em várias áreas do conhecimento e as suas relações com as outras ciências foram, e continuam a ser, fonte de inspiração para o desenvolvimento da Matemática.

Os semigrupos numéricos são uma generalização imediata da estrutura dos naturais e aparecem de forma natural em diversos contextos da Matemática. O estudo dos semigrupos numéricos é um problema clássico equivalente ao estudo das soluções naturais de um sistema de equações com coeficientes em $\mathbb{N}$. A partir de 1970, o seu estudo foi motivado pelas suas aplicações na Geometria Algébrica. Um semigrupo numérico é um subconjunto dos números naturais fechado para a adição, contém o zero e gera os inteiros como um grupo.

Um dos problemas interessantes relacionados com os semigrupos numéricos é conhecido por "The exchange coin problem", chamado assim pela sua ligação com a possibilidade de obter certas quantias de dinheiro dispondo de moedas de valores pré-definidos. Este problema foi levantado por Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917): dado um conjunto de inteiros não negativos $a_1, a_2, \dots, a_p$, relativamente primos, encontrar o maior inteiro natural (chamado número de Frobenius) que não é representado como combinação linear de $a_1, a_2, \dots, a_p$. Este problema foi resolvido por Sylvester para $p = 2$ (ver Proposição 1.17) mas continua em aberto para $p > 2$.

Ao longo deste trabalho estudamos também outros invariantes de um semigrupo numérico S. Dedicamos especial atenção aos semigrupos numéricos irredutíveis. Estes constituem uma classe de semigrupos numéricos bastante estudada, não só do ponto de vista semigrupista, mas também em virtude das suas relações com a Teoria de Anéis e com a Geometria Algébrica.

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições, caracterizações e resultados que suportam o presente estudo. Começamos por definir semigrupo numérico S como um submonóide de $(\mathbb{N}, +)$ tal que o seu complementar em $\mathbb{N}$ é finito. Assim, o complementar de S em $\mathbb{N}$ determina o semigrupo numérico S, e o maior elemento que não pertence a S é designado por número de Frobenius de S e denotado por $F(S)$. Além disso, o máximo divisor comum dos elementos do semigrupo numérico é igual a um. Um semigrupo numérico S admite um único sistema de geradores $\{n_1,\dots,n_p\}$ e um elemento n pertencente a S é da forma $n=\sum_{i=1}^{p}a_i n_i$, com $a_i \in \mathbb{N}$. Dado n um elemento de $S\setminus\{0\}$, definimos conjunto Apéry de n em S o conjunto $Ap(S,n)=\{s\ \in S \mid s-n\ \notin S\}$. Este conjunto caracteriza S. De facto, todo o elemento s pertencente a S é escrito de forma única $w+kn$, com $w\in Ap(S,n)$ e $k\in\mathbb{N}$, e $\{n\}\cup(Ap(S,n)\setminus\{0\})$ é um sistema de geradores de S. O menor inteiro positivo que pertence ao semigrupo numérico é chamado multiplicidade de S e denotado por $m(S)$. Merece especial atenção o conjunto Apéry de S referente à sua multiplicidade. Neste capítulo estudamos invariantes, não menos importantes do que os já referidos, tais como: a dimensão de imersão de S, o grau de singularidade ou género de S, os pseudo-números de Frobenius de S, o tipo de S, etc.

Um semigrupo numérico S é isomorfo a $\mathbb{N}^p/_\sigma$, com σ uma congruência em $\mathbb{N}^p$. Rédei mostra que a congruência σ é finitamente gerada e portanto existe um subconjunto ρ de $\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ tal que $S\cong \mathbb{N}^p/_\sigma$ (ver [17]). A este subconjunto chama-se apresentação para o semigrupo numérico S e diz-se que S é finitamente apresentado. Se o cardinal de ρ for o menor de entre os cardinais de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}^p\times\mathbb{N}^p$ que geram σ, o subconjunto ρ diz-se uma apresentação minimal para S. No capítulo 2 caracterizamos uma apresentação minimal para um semigrupo numérico S e descrevemos um método algorítmico para encontrar uma apresentação minimal para S. Neste estudo usamos alguns conceitos da teoria de grafos. Este método de caracterizar uma apresentação minimal para um semigrupo numérico em termos de conexidade de certos grafos foi introduzido por Rosales, ver [11].

O capítulo 3 é dedicado à determinação de uma quota para o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico S. A partir de Herzog [9] e de Rosales [11], temos que o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico é sempre maior ou igual à sua dimensão de imersão menos um e que são os semigrupos numéricos que são intersecção completa que atingem o menor cardinal. Além disso, Bresinsky mostra que o cardinal de uma apresentação minimal não pode ser limitado superiormente somente em termos da dimensão de imersão do semigrupo numérico. Neste capítulo vamos estabelecer uma quota para o cardinal de uma apresentação para um semigrupo numérico em função da multiplicidade e da dimensão de imersão do semigrupo numérico. Mostramos ainda que, no conjunto de todos os semigrupos numéricos com uma dada multiplicidade, são os semigrupos com máxima dimensão de imersão que admitem uma apresentação minimal com cardinalidade máxima.

No capítulo 4 iniciamos o estudo dos semigrupos numéricos irredutíveis, que são os semigrupos numéricos que não podem ser expressos como intersecção de dois semigrupos numéricos que o contenham propriamente. Mostramos que os semigrupos numéricos irredutíveis são os elementos maximais no conjunto de todos os semigrupos numéricos com número de Frobenius F(S). Caracterizamos estes semigrupos em função da paridade do seu número de Frobenius (simétricos ou pseudo-simétricos) e em função dos seus conjuntos de Apéry. A finalizar, estudamos os semigrupos numéricos irredutíveis com multiplicidade 3 e 4, explicitando uma apresentação minimal para estes semigrupos numéricos.

O capítulo 5 é também dedicado aos semigrupos numéricos irredutíveis. Começamos por mostrar que todo o semigrupo numérico S que não é irredutível pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos irredutíveis e descrevemos um processo para fazer a decomposição de um semigrupo numérico em irredutíveis. Em seguida, caracterizamos os semigrupos numéricos que podem ser expressos como intersecção de semigrupos numéricos simétricos e, também, os que admitem uma decomposição em pseudo-simétricos. Neste capítulo descrevemos ainda métodos para fazer cada uma destas decomposições.

Por último, no capítulo 6, determinamos uma quota para o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico irredutível S em função da sua multiplicidade e da sua dimensão de imersão.

Capítulo 1

Preliminares e conceitos básicos

Neste capítulo apresentamos algumas definições, caracterizações e resultados importantes que suportam o estudo dos semigrupos numéricos que aqui iniciamos.

1.1 Preliminares

Seja F um conjunto não vazio. Uma ***relação binária*** σ em F é um subconjunto de $F \times F$. Se $(a,b) \in \sigma$ escrevemos $a\,\sigma\,b$ e dizemos que a está σ –relacionado com b. A relação binária σ diz-se uma ***relação de equivalência*** se verifica as três propriedades seguintes:

1. $a\,\sigma\,a$, para todo o $a \in F$ (reflexiva);
2. Quaisquer que sejam $a, b \in F$ tais que $a\,\sigma\,b$, então $b\,\sigma\,a$ (simétrica);
3. Quaisquer que sejam $a, b, c \in F$ tais que $a\,\sigma\,b$ e $b\,\sigma\,c$, então $a\,\sigma\,c$ (transitiva).

Uma relação de equivalência divide o conjunto F em classes de equivalência: para cada $a \in F$, definimos a sua ***classe módulo –σ***

$$[a]_\sigma = \{\, b \in F \mid a\,\sigma\,b \,\}$$

que designamos por $\sigma - classe$ de a. O conjunto de todas as σ-classes que é possível formar com os elementos de F é designado por ***conjunto quociente*** de F por σ e denotado por $\frac{F}{\sigma}$, isto é,

$$\frac{F}{\sigma} = \{[a]_\sigma \mid a \in F\,\}.$$

Uma relação de equivalência σ diz-se uma ***congruência sobre F***, se para todos os $a, b \in F$ tais que $a\,\sigma\,b$ e $c \in F$ se tem $(a+c)\,\sigma\,(\,b+c)$.

O conjunto $\tau = \{(u,u) | u \in F\}$ é uma congruência, chamada congruência trivial.

Dado um subconjunto $\rho \subseteq F \times F$, temos que a intersecção de todas as congruências que contêm ρ é ainda uma congruência. Definimos esta congruência como congruência gerada por ρ, denotamo-la por $\bar{\rho}$. Além disso, é a menor congruência que contém ρ, no sentido em que tem cardinal mínimo entre todos os subconjuntos de $F \times F$ que geram ρ.

O próximo resultado mostra que a congruência $\bar{\rho}$ existe.

Proposição 1.1: Seja ρ, um subconjunto de $F \times F$. Definimos $\rho^0 = \rho \cup \rho^{-1} \cup \tau$, com $\rho^{-1} = \{(v,u) \in F \times F \mid (u,v) \in \rho\}$ e $\rho^1 = \{(v+u, w+u) \in F \times F \mid (v,w) \in \rho^0 \ e \ u \in F\}$. Então $\bar{\rho}$ é o conjunto dos pares $(v,w) \in F \times F$ tal que existe $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, v_1, \dots, v_k \in F$ com $v_0 = v$, $v_k = w$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo o $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Dem. Vejamos então que $\bar{\rho}$ construída desta forma é uma congruência.

1) Visto que $\tau \subseteq \bar{\rho}$, então $\bar{\rho}$ é reflexiva.

2) Se $(v,w) \in \bar{\rho}$ deve existir $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, v_1, \dots, v_k \in F$ tal que $v_0 = v$, $v_k = w$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo o $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Como $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ então $(v_{i+1}, v_i) \in \rho^1$. Se definirmos $w_i = v_{k-i}$ com $i \in \{0, \dots, k\}$, obtemos $(w,v) \in \bar{\rho}$, isto é, $\bar{\rho}$ é simétrica.

3) Se (u,v) e (v,w) pertencem a $\bar{\rho}$ então existem $k, l \in \mathbb{N}$ e $v_0, \dots, v_k$, $w_0, \dots, w_l \in F$ tal que $v_0 = u$, $v_k = w_0 = v$, $w_l = w$ e $(v_i, v_{i+1}), (w_j, w_{j+1}) \in \rho^1$, para adequados i e j. Ligando as sequências $\{v_i\}_i$ e $\{w_j\}_j$, obtemos $(u,w) \in \bar{\rho}$. Portanto $\bar{\rho}$ é transitiva.

4) Se $(v,w) \in \bar{\rho}$ e $u \in F$, então existem $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, v_1, \dots, v_k \in F$ tal que $v_0 = v$, $v_k = w$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo o $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Se definirmos $w_i = v_i + u$ para todo o $i \in \{0, \dots, k\}$ obtemos que $(w_i, w_{i+1}) \in \rho^1$ e assim $(v+u, w+u) \in \bar{\rho}$.

Finalmente, temos que qualquer congruência contendo ρ deverá conter $\bar{\rho}$, donde $\bar{\rho}$ é a menor congruência que contém ρ.

Dado ρ um subconjunto de $A \times A$ e uma congruência σ, se $\bar{\rho} = \sigma$ temos que a congruência σ é gerada por ρ e que ρ é um conjunto de geradores de σ. No caso em que ρ é finito, dizemos que σ é finitamente gerada.

Um **semigrupo** é um par $(S,*)$ em que S é um conjunto e $*$ é uma operação binária associativa definida em S. Os conjuntos envolvidos neste trabalho são subconjuntos de inteiros e a operação binária neles definida é a adição usual, consequentemente os semigrupos são todos comutativos ($a+b=b+a$, para quaisquer a e b pertencentes a S), pelo que será omitida a referência a esta propriedade. Para simplificar a escrita, omitir-se-á também a indicação da operação binária. O semigrupo $(S,+)$, por exemplo, será designado apenas por S.

Um subconjunto não vazio T de um semigrupo S diz-se um subsemigrupo de S se é fechado para a operação binária considerada em S. Dado um subconjunto A, não vazio de S, merecem especial atenção os subsemigrupos de S que contêm A. A intersecção dos subsemigrupos de S que contêm A é um subsemigrupo de S, e o menor no sentido da inclusão, de todos os subsemigrupos que contêm A. Denotamos este subsemigrupo por $\langle A\rangle$, e chamamos-lhe **subsemigrupo gerado por A**. Tem-se, então

$$\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A\}.$$

Se $\langle A\rangle = S$, dizemos que *S é* ***gerado por A*** e que A é um ***sistema de geradores*** *de S*. Se A é um conjunto com um número finito de elementos, dizemos que S é finitamente gerado.

Sejam S e T dois semigrupos. Uma aplicação $f: S \to T$ é um homomorfismo de semigrupos se $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para todos os elementos a e b de S. Dizemos que f é um monomorfismo, um epimorfismo ou um isomorfismo, se f é injectiva, sobrejectiva ou bijectiva, respectivamente.

Se existe um isomorfismo f entre dois semigrupos S e T, estes dizem-se isomorfos e escreve-se $S \cong T$. Se f é um isomorfismo entre dois semigrupos, f^{-1} também o é.

A um semigrupo S que contém um elemento u tal que, para todo o $s \in S$, $u+s=s+u=s$, chamamos ***monóide***, e ao elemento u, que é único, chamamos elemento identidade, ou apenas identidade. Neste trabalho, $u=0$. Um subconjunto T de S é um submonóide de S se é um subsemigrupo de S e $0 \in T$. Observe-se que $\{0\}$ é um submonóide de M. Chama-se o submonóide trivial de M.

A intersecção de submonóides de um monóide S é também um submonóide de S. Dado um monóide S e um seu subconjunto A, o menor submonóide de S que contém A é $\langle A\rangle = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A\}$ e é designado por submonóide de S gerado por A. À semelhança dos semigrupos, se $\langle A\rangle = S$, também se diz que S é gerado por A e que A é um sistema de geradores de S. Além disso, se o sistema de geradores de S for finito, o monóide S diz-se finitamente gerado. Nota: $\langle\emptyset\rangle = \{0\} = \langle 0\rangle$.

Uma aplicação entre dois monóides S e T é um homomorfismo de monóides se $f(a+b)=f(a)+f(b)$, para todos os elementos a e b de S, e $f(0)=0$. Os conceitos de monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo são válidos nos monóides.

Proposição 1.2: Seja S um monóide e σ uma congruência sobre S. Então $S/_{\sigma}$ munido com a operação $[a]_\sigma+[b]_\sigma=[a+b]_\sigma$ é um monóide.

Dem. Comecemos por mostrar que a operação está bem definida. Sejam $a,\ b,\ c$ e $d \in S$ tais que $a\,\sigma\,b$ e $c\,\sigma\,d$. Queremos mostrar que $(a+c)\sigma\,(b+d)$. Ora, se $a\,\sigma\,b$ e $c \in S$, tem-se $(a+c)\sigma\,(b+c)$, e se $c\,\sigma\,d$ e $b \in S$, tem-se $(b+c)\sigma\,(b+d)$, visto que σ é uma congruência, donde $(a+c)\sigma\,(b+d)$, por transitividade. Além disso, a operação é comutativa e associativa e a identidade é a classe $[0]_\sigma$. □

O monóide $(S/_{\sigma},+)$ é designado *o* ***monóide quociente módulo-*** $\boldsymbol{\sigma}$.

Consideremos agora f, um homomorfismo entre dois monóides S e T. Definimos **kernel congruência de** $\boldsymbol{f}$ como

$$Ker\,(f)=\{(a,b)\in S\times S\,|f(a)=f(b)\}.$$

Este conjunto é uma congruência sobre S e a ***imagem de*** $\boldsymbol{f}$, definida como

$$Im(f)=\{f(a)|\ a\ \in S\}$$

é um submonóide de T.

Note-se que existem diferenças entre as definições para monóides e para grupos abelianos. Nos grupos abelianos, a condição $f(0)=0$ não precisa de ser imposta, uma vez que $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ e é válida a lei cancelativa, donde $f(0)=0$. Também a definição de kernel num grupo é feita como pré-imagem da identidade. De facto, $f(a)=f(b)$ é equivalente a $f(a-b)=0$.

Teorema 1.3: Seja $f\colon S\longrightarrow T$ um homomorfismo de monóides **.** Então

$$F\colon S/_{\ker(f)}\longrightarrow Im(f),$$

tal que $F([a]_{\ker(f)})=f(a)$ é um isomorfismo de monóides.

Dem. A aplicação F está bem definida e é um homomorfismo, uma vez que f é um homomorfismo. Além disso, é injectiva e sobrejectiva. □

Como consequência do Teorema 1.3, todo o monóide S finitamente gerado é isomorfo a $\mathbb{N}^p/_{\sigma}$, para algum $p\in\mathbb{N}$. De facto, se $\{n_1,n_2,\dots,n_p\}$ for um conjunto de geradores de S, basta considerar a função $f\colon\mathbb{N}^p\longrightarrow S$, definida por $f(a)=\sum_{i=1}^{p}a_in_i$, onde $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p$. Esta função f é um epimorfismo entre os dois monóides. Considerando $\sigma = \ker(f)$, tem-se que $\frac{\mathbb{N}^p}{\sigma}$ é isomorfo a S.

Proposição 1.4: Seja S um monóide finitamente gerado e $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ um conjunto de geradores de S. Então existe uma congruência σ sobre $\mathbb{N}^p$ tal que S é isomorfo a ${\mathbb{N}^p}/{\sigma}$.

Este resultado permite estudar um monóide finitamente gerado recorrendo ao monóide $\mathbb{N}^p$, para algum $p \in \mathbb{N}$.

A um subconjunto ρ de $\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$ tal que $S \cong {\mathbb{N}^p}/{\bar{\rho}}$ chama-se apresentação **para S** e o monóide S diz-se ***finitamente apresentado.*** Se o cardinal de ρ for o menor de entre os cardinais de todos os subconjuntos que geram $\bar{\rho}$, o subconjunto ρ diz-se uma ***apresentação minimal*** *para* S.

Temos, então, o seguinte resultado (ver em [17]).

Teorema 1.5 (Rédei): Todo o monóide finitamente gerado é finitamente apresentado.

1.2 Conceitos básicos

Vamos agora caracterizar os submonóides que são objecto de estudo neste trabalho.

Definição 1.6: Um ***semigrupo numérico*** é um submonóide de $\mathbb{N}$ tal que o seu complementar em $\mathbb{N}$ é finito.

O resultado seguinte dá-nos uma forma alternativa de definir um semigrupo numérico.

Lema 1.7: Seja A um subconjunto, não vazio, de inteiros positivos. Então $S = \langle A \rangle$ é um semigrupo numérico se e só se $m.d.c.(A) = 1$.

Dem. Seja $d = m.d.c.(A)$. Tem-se $d|s$ qualquer que seja $s \in \langle A \rangle$, uma vez que $s = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ e $d|a_i$. Além disso, como $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, o seu complementar em $\mathbb{N}$ é finito, logo a partir do maior elemento de $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ todos os inteiros pertencem a $\langle A\rangle$. Podemos, então, considerar $x \in \langle A\rangle$ tal que x e $x+1$ pertencem a $\langle A\rangle$. Tem-se que $d|x$ e $d|x+1$, o que obriga a que $d=1$.

Para demonstrarmos a condição suficiente, basta provar que $\mathbb{N} \setminus \langle A\rangle$ é finito. Por hipótese, $mdc(A)=1$ então existem inteiros $z_1, \dots, z_n$ e $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $z_1a_1 + \dots + z_na_n = 1$. Mudando os termos negativos do primeiro para o segundo membro, obtemos uma igualdade em que os termos são todos positivos

$$z_{i1}a_{i1} + \dots + z_{ik}a_{ik} = 1 - z_{j1}a_{j1} - \dots - z_{jt}a_{jt}\,.$$

Ora, $-z_{j1}a_{j1} - \dots - z_{jt}a_{jt}$ e $z_{i1}a_{i1} + \dots + z_{ik}a_{ik}$ pertencem a $\langle A\rangle$, donde existe $s \in \langle A\rangle$, $s = -z_{j1}ai_1 - \dots - z_{jt}a_{jt}$, tal que $s+1 \in \langle A\rangle$, o que implica que $\{s, s+1, 2s+2, \dots, (s-1)s+s-1\} \subseteq S$.

Provemos que se $n \geq (s-1)s + (s-1)$, então $n \in \langle A\rangle$. Consideremos q e r inteiros tais que $n = qs + r$, com $0 \leq r \leq s-1$. Por hipótese, $n = qs + r \geq (s-1)s + (s-1)$, donde $qs + (s-1) \geq (s-1)s + (s-1)$. Assim, $qs \geq (s-1)s$ e, consequentemente, $q \geq s-1$, ou seja, $q \geq s-1 \geq r$. Visto que $q - r \geq 0$, então $n = (rs + r) + (q-r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A\rangle$. □

Seja M um submonóide de $\mathbb{N}$ e d o máximo divisor comum entre os elementos de M. Pelo Lema anterior, o conjunto S = $\langle \left\{\frac{m}{d} \mid m \in M\right\}\rangle$ é um semigrupo numérico, uma vez que o $mdc\left\{\frac{m}{d} \mid m \in M\right\} = 1$. Se considerarmos a função que a cada elemento m de M faz corresponder o elemento $\frac{m}{d}$ de S, obtém-se um isomorfismo entre M e S, pelo que podemos dizer que qualquer submonoide de $\mathbb{N}$ é, a menos de um isomorfismo, um semigrupo numérico.

Proposição 1.8: Todo o submonoide de $\mathbb{N}$, não trivial, é isomorfo a um semigrupo numérico.

Número de Frobenius e Género de um semigrupo

Uma vez que o complementar de S em $\mathbb{N}$ é finito, vamos em seguida caracterizar este conjunto. Designamos o complementar de S em $\mathbb{N}$ por ***conjunto das falhas de S*** e denotamo-lo por $G(S)$,

$$G(S) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S\}.$$

O cardinal de G(S) designa-se por ***género de S,*** ou ***grau de singularidade de S,*** e denota-se por $g(S)$. O maior inteiro que não pertence a S designa-se por ***número de Frobenius de S*** e denota-se por $F(S)$,

$$F(S) = m\acute{a}x\,(\,G(S)).$$

Proposição 1.9: Seja S um semigrupo numérico e $F(S)$ o seu número de Frobenius. Então $S \cup \{F(S)\}$ é um semigrupo numérico.

Dem. O complementar de $S \cup \{F(S)\}$ em $\mathbb{N}$ é finito, uma vez que está contido no complementar de S em $\mathbb{N}$. Para completar a prova basta mostrar que $S \cup \{F(S)\}$ é fechado para a soma. Sejam $a, b \in S \cup \{F(S)\}$. Se a e b pertencem a S então $a + b \in S$, dado que S é um semigrupo numérico. Se a e b não pertencem a S, tem-se $a + b = 2F(S) > F(S)$, donde $a + b \in S$. Se um deles, apenas, não pertence a S, por exemplo a, tem-se $a + b = F(S) + b \geq F(S) \in S \cup \{F(S)\}$. □

Seja S um semigrupo numérico e n um elemento de $S\backslash\{0\}$, definimos ***conjunto Apéry de n em S*** o conjunto

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}.$$

Apresentamos, em seguida, um exemplo que ilustra os conceitos introduzidos anteriormente.

Exemplo 1.10: Seja $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$, tem-se $S = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, \rightarrow\}$. O símbolo $\rightarrow$ significa que todos os números maiores do que 14 pertencem a S.
Logo $F(S) = 10$, $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$, $g(S) = 6$ e $Ap(S, 4) = \{0, 7, 9, 14\}$.

O resultado seguinte caracteriza os elementos do conjunto Apéry de n em S.

Lema 1.11: Seja S um semigrupo numérico e n um elemento de $S\backslash\{0\}$. Então,

$$Ap(S, n) = \{0 = w(0), w(1), \ldots, w(n-1)\},$$

onde $w(i)$ é o menor inteiro de S congruente com i módulo n, para todo o $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Dem. Para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, se $i \in S$ consideremos $w(i) = i$. Caso contrário, consideremos os inteiros da forma $i + kn$, com $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que $\mathbb{N}\backslash S$

é finito, existe um $k' \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k'$, $i + kn \in S$. Então $w(i)$ é o menor destes números que pertence a S. □

Atendendo ao lema anterior, podemos concluir que o número de elementos do conjunto $Ap(S,n)$ é igual a n.

Corolário 1.12 : Seja S um semigrupo numérico e n um elemento de $S\setminus\{0\}$. Então,

$$\# \, Ap(S,n) = n.$$

Lema 1.13: Seja S um semigrupo numérico e n um elemento de $S\setminus\{0\}$. Então, para cada $s \in S$ existe um e um só par ordenado da forma $(k,w) \in \mathbb{N} \times Ap(S,n)$ tal que

$$s = w + kn\,.$$

Dem. Dado $s \in S$, tem-se $s = i + k'n$, com $i \in \{0,\dots,n-1\}$ e $k' \in \mathbb{N}$. Consequentemente, existe um e um só $w(i) \in Ap(S,n)$ tal que $s \equiv w(i)(mod n)$ e, dado que $s \geq w(i)$, tem-se que $s - w(i) = kn$, para algum $k \in \mathbb{N}$. □

Dado um elemento n em $S\setminus\{0\}$, obtemos que $\{\{n\} \cup (Ap(S,n)\setminus\{0\})\}$ é um ***sistema de geradores de S*** com cardinal igual a n, a partir do Lema 1.13.

Dizemos que um sistema de geradores de um semigrupo numérico é minimal se nenhum dos seus subconjuntos próprios gera o semigrupo numérico. Veremos em seguida que todo o semigrupo numérico admite um e um só sistema minimal de geradores e que esse sistema de geradores é finito.

Teorema 1.14: Seja S um semigrupo numérico e $S^* = S\setminus\{0\}$. Então $S^*\setminus(S^*+S^*)$ é um sistema minimal de geradores finito de S.

Dem. Seja $s \in S^*$. Se $s \notin S^*\setminus(S^*+S^*)$ então existem $x,y \in S^*$ tais que $x + y = s$. Repetindo este procedimento para x e y, após um número finito de etapas, uma vez que $x,y < s$, encontramos $s_1,\dots,s_n \in S^*\setminus(S^*+S^*)$ tais que $s = s_1 + \dots + s_n$, o que prova que $S^*\setminus(S^*+S^*)$ é um sistema de geradores de S.

Em seguida provamos a minimalidade de $S^*\setminus(S^*+S^*)$. Suponhamos que A é outro sistema de geradores de S. Seja $x \in S^*\setminus(S^*+S^*)$. Existem $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{N}$ e $a_1,\dots,a_n \in A$ tais que $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Como $x \notin S^*+S^*$, $x = a_i$ para algum $i \in \{1,\dots,n\}$. Concluímos, assim, que $S^*\setminus(S^*+S^*)$ é um sistema minimal de geradores de S.

Além disso, como $Ap(S,n)\backslash\{0\} \cup \{n\}$ é um sistema de geradores de S com n elementos, o conjunto $S^*\backslash (S^* + S^*)$ tem no máximo n elementos, portanto $S^*\backslash (S^* + S^*)$ é finito. □

Seja S um semigrupo numérico e seja $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores. O inteiro n_1, que é o menor dos geradores de S, é denominado a ***multiplicidade de S*** e é denotado por $m(S)$, isto é, $m(S) = n_1$. O cardinal do sistema minimal de geradores de S é denominado ***dimensão de imersão de S*** e é denotado por $e(S)$, ou seja, $e(S) = p$.

Proposição 1.15: seja S um semigrupo numérico. Então

1) $m(S) = min(S\backslash\{0\})$.

2) $e(S) \leq m(S)$.

Dem. A multiplicidade é sem dúvida o menor inteiro de $S\backslash\{0\}$. Relativamente à segunda afirmação, uma vez $Ap\big(S, m(S)\big)\backslash\{0\} \cup \{m(S)\}$ é um sistema de geradores de S com $m(S)$ elementos, o sistema minimal de geradores de S não poderá ter mais de $m(S)$ elementos. □

O resultado seguinte foi obtido por Selmer em 1977 e permite calcular o número de Frobenius e género de um semigrupo numérico S a partir de um conjunto Apéry de um elemento de $S\backslash\{0\}$.

Proposição 1.16 (Fórmula de Selmer): Seja S um semigrupo numérico e seja n um elemento de $S\backslash\{0\}$. Então

1) $F(S) = \big(máx\, Ap(S;n)\big) - n$.

2) $g(S) = \frac{1}{n}\big(\sum_{w\in Ap(S,n)} w\big) - \frac{n-1}{2}$.

Dem. 1) Por definição, o número de Frobenius de S é o maior número inteiro que não pertence a S. Tem-se $F(S) + n \in S$ e $F(S) + n - n \notin S$, donde $F(S) + n \in Ap(S,n)$. Além disso, $F(S) + n$ é o maior elemento deste conjunto, uma vez que se $x > F(S) + n$, tem-se $x - n > F(S)$ o que implica que $x - n \in S$, donde $x \notin Ap(S,n)$.

2) Temos que $Ap(S,n) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n-1)\}$, onde $w(i)$ é o menor inteiro de S congruente com i módulo n, para todo o $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pelo

Lema 1.11. Assim, para cada $w(i) \in Ap(S,n)$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $w(i) = i + k_i n$. Temos, então ,

$Ap(S,n) =$

$$= \{0 = w(0), w(1) = k_1 n + 1, w(2) = k_2 n + 2, \dots, w(n-1) = k_{n-1} n + (n-1)\}.$$

Notemos que um número inteiro x congruente com n módulo i não pertence a S se e só se $x < w(i)$, uma vez que $w(i)$ é o menor inteiro de S congruente com i módulo n. Assim, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, existem k_i inteiros menores do que $w(i)$ que são congruentes com i módulo n. Então para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $0n + i, 1n + i, \dots, (k_i - 1)n + i \notin S$. Logo,

$$g(S) = k_1 + \cdots + k_{n-1} = k_1 + \frac{1}{n} + \cdots + k_{n-1} + \frac{n-1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n} k_1 n + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} k_{n-1} n + \frac{n-1}{n}\right) - \left(\frac{1 + \cdots + n-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(k_1 n + 1) + \cdots + \frac{1}{n}(k_{n-1} n + n - 1) - \left(\frac{\frac{1+n-1}{2} \times (n-1)}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\big((k_1 n + 1) + \cdots + (k_{n-1} n + n - 1)\big) - \left(\frac{n(n-1)}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}. \ \square$$

O problema de Frobenius consiste em encontrar uma fórmula para $F(S)$ e $g(S)$ a partir dos geradores minimais de um semigrupo numérico S. Sylvester resolveu este problema no final do sec. XIX para semigrupos com dois geradores minimais, no entanto esta questão ainda se encontra em aberto para semigrupos com dimensão de imersão maior ou igual a 3, ver [10].

Vejamos o caso em que o semigrupo numérico tem dimensão de imersão dois. Seja $S = \langle a, b \rangle$. Tem-se

$$Ap(S,a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}.$$

Proposição 1.17: Sejam a e b inteiros positivos tais que $m.d.c.(a,b) = 1$.

1) $F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b$

2) $g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2}$

Dem. Seja $S = \langle a, b \rangle$. Então, atendendo à Proposição 1.16, obtemos

1) $F(S) = \big(\max Ap(S; a)\big) - a = (a-1)b - a = ab - a - b.$

2) $g(S) = \frac{1}{a}\left(\sum_{w \in Ap(S,a)} w\right) - \frac{a-1}{2} = \frac{1}{a}\left(\frac{b + (a-1)b}{2} \times (a-1)\right) - \frac{a-1}{2} =$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{ab}{2} \times (a-1)\right) - \frac{a-1}{2} = \frac{b}{2} \times (a-1) - \frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2} = \frac{ab - a - b + 1}{2}. \ \square$$

Observamos que se S tem dimensão de imersão igual a 2, então $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$, o que permite concluir que F(S) é ímpar. Esta propriedade não pode ser generalizada a semigrupos com dimensão de imersão maior que 2, no entanto alguns semigrupos numéricos verificam esta propriedade e constituem uma classe muito importante de semigrupos numéricos que estudaremos à frente.

Seja S um semigrupo numérico. Denotamos por $\boldsymbol{N(S)}$ o conjunto de todos os elementos de S menores do que $F(S)$.

$$N(S) = \{s \in S | s < F(S)\}.$$

Este conjunto, por si só, não determina S. Contudo, se considerarmos também F(S), obtemos que $S = N(S) \cup \{F(S) + 1, \rightarrow\}$.

O cardinal de $N(S)$ é denotado por $n(S)$ e temos que

$$g(S) + n(S) = F(S) + 1.$$

Dado um semigrupo numérico S e um elemento s de S, com $s < F(S)$, $F(S) - s$ não pode pertencer a S (se $F(S) - s \in S$, então $F(S) = s + s'$, com $s' \in S\backslash\{0\}$, o que é absurdo visto que $F(S)$ pertenceria a S). Assim, a cada elemento de $N(S)$ corresponde um elemento de $G(S)$. Donde $g(S) \geq n(S)$. Podemos então enunciar a seguinte propriedade:

Proposição 1.18: Seja S um semigrupo numérico. Então

$$g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}.$$

Nota: Na relação anterior, quando a igualdade se verifica, o semigrupo numérico tem o menor número possível de falhas.

Pseudo-número de Frobenius

Seja S um semigrupo numérico. Dizemos que x é um ***pseudo-número de Frobenius de S*** se $x \notin S$ e $x + s \in S$ para todo o $s \in S\backslash\{0\}$. Denotamos o conjunto dos pseudo-números de Frobenius de S por $PF(S)$. O cardinal de $PF(S)$ é denotado por t(S) e denominado ***tipo de S.***

$$\# PF(S) = \# \{x \in \mathbb{Z}\backslash S \mid x + s \in S \text{ para todo o } s \in S\backslash\{0\}\} = t(S).$$

Se $S = \mathbb{N}$, tem-se que $PF(S) = \{F(S)\} = \{-1\}$ e se $S \neq \mathbb{N}$, verifica-se que $\{F(S)\} \subseteq PF(S) \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Exemplo 1.19: Consideremos o semigrupo numérico $S = \langle 5,7,9 \rangle$.

Tem-se que $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \rightarrow\}$ e $\mathbb{Z} - S = \{\ldots, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13$.

Assim $PF(S) = \{11, 13\}$, visto que $6 + 5 = 11 \notin S$, $8 + 5 = 13 \notin S$, o mesmo acontecendo para $11 + s \geq 11 + 5 \in S$, qualquer que seja $s \in S \setminus \{0\}$. Logo $t(S) = 2$.

Da definição anterior resulta que $F(S)$ é um pseudo-número de Frobenius, este é o maior elemento no conjunto dos pseudo-números de Frobenius, relativamente à ordem usual em $\mathbb{Z}$.

No conjunto dos inteiros define-se a seguinte relação:

$$a \leq_S b \text{ se } b - a \in S.$$

Como S é um semigrupo numérico, esta relação é uma relação de ordem (reflexiva, anti-simétrica e transitiva).

Notamos que os elementos minimais de $S \setminus \{0\}$, relativamente à relação $\leq_S$, são os elementos do sistema minimal de geradores de S. E, se atendermos à definição de pseudo-números de Frobenius de S, podemos concluir que estes são os elementos maximais em $\mathbb{Z} \setminus S$ relativamente à relação $\leq_S$. Donde obtemos uma caracterização alternativa para os pseudo-números de Frobenius.

Proposição 1.20: Seja S um semigrupo numérico. Então

$$PF(S) = Maximais \leq_S (\mathbb{Z} \setminus S).$$

Dem. De facto, dados $a, b \in PF(S)$, se $a \leq_S b$ significa que $b - a = s \in S$, ou seja, $b = a + s$. Mas, como $a \in PF(S)$, tem-se $b = a + s \in S$, o que é absurdo, uma vez que $b \in PF(S)$. □

O resultado anterior estabelece uma relação entre os geradores minimais do semigrupo numérico S e os seus pseudo-números de Frobenius, uma vez que os primeiros são os elementos minimais de $(S \setminus \{0\})$ e os segundos são os maximais de $(\mathbb{Z} \setminus S)$.

Consideremos, novamente, o semigrupo numérico $S = \langle 5,7,9 \rangle$. Tem-se $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \rightarrow\}$ e $\mathbb{Z} - S = \{\ldots, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13$. Verificamos que

$13 \nleq_S 11$ e $8 \leq_S 13$, $6 \leq_S 13$, $4 \leq_S 13$, $3 \leq_S 13$, $2 \leq_S 11$,

e assim sucessivamente, logo $PF(S) = \{11, 13\}$.

Como consequência da Proposição 1.20, obtemos outra caracterização dos pseudo-números de Frobenius de um semigrupo numérico S, agora em função dos conjuntos Apéry.

Proposição 1.21: Seja S um semigrupo numérico e n um dos seus elementos, não nulo. Então

$$PF(S) = \{w - n \mid w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S,n)\}.$$

Dem. Seja $x \in PF(S)$ e $n \in S - \{0\}$. Então $x \notin S$ e $x + n \in S$ (visto $x \in PF(S)$), donde $x + n \in Ap(S,n)$. Tomemos $w \in Ap(S,n)$ tal que $x + n \leq_S w$. Então $w - (x + n) = w - x - n \in S$. Ou seja, existe $s \in S$ tal que $w - x - n = s$, donde $w - n = x + s$. Como $w - n \notin S$, tem-se $x + s \notin S$. Ora, visto que $x \in PF(S)$ conclui-se que $s = 0$. Logo $w = x + n$.

Consideremos, agora, $w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S,n)$ e provemos que $w - n \in PF(S)$. Seja $s \in S \setminus \{0\}$ tal que $w - n + s \notin S$. Então $w + s \in Ap(S,n)$ e $w \leq_S w + s$ (uma vez que $w + s - w = s \in S$) o que contraria o facto de $w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S,n)$. Logo $w - n + s \in S$ para todo o $s \in S - \{0\}$ e $w - n \in PF(S)$.□

No próximo resultado estabelecemos o papel desempenhado pelos pseudo-números de Frobenius num semigrupo numérico.

Proposição 1.22: Seja S um semigrupo numérico, $f_1, \dots, f_t$ os pseudo-números de Frobenius de S e $x \in \mathbb{Z}$. Então $x \notin S$ se e só se $f_i - x \in S$, para algum $\mathrm{i} \in \{1, \dots, \mathrm{t}\}$.

Dem. *Condição necessária*. Seja $x \notin S$ e $n \in S - \{0\}$. Existe $w(i) \in Ap(S,n)$ tal que $x \equiv w(i) mod(n)$, com $x < w(i)$. Logo $x = w(i) - kn$, com $\mathrm{k} > 0$. Seja $\{w_{j1}, \dots, w_{jt}\} = Max_{\leq_S} Ap(S,n)$ e $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $w_{ji} - w \in S$. Seja $w_{ji} - n = f_i$. Então $f_i - x = (w_{j_i} - n) - (w(i) - kn) = w_{j_i} - w(i) + n(k-1) \in S$, visto que $w_{j_i} - w(i) \in S$ e $k - 1 \geq 0$.

Condição suficiente. Seja $x \in \mathbb{Z}$ *e* $f_i \in PF(S)$ verificando que $f_i - x \in S$. Se x pertence a S, tem-se $f_i = x + s$, com $s \in$ S, donde $f_i \in S$ é impossível. Logo $x \notin S$.□

Uma vez que o cardinal de $Ap(S, m(S))$ é igual a $m(S)$, e zero não é elemento maximal, podemos também concluir que não existem mais de $m(S) - 1$ pseudo-números de Frobenius.

Corolário 1.23: Seja S um semigrupo numérico. Então $t(S) \leq m(S) - 1$.

Foi referido anteriormente que a dimensão de imersão de um semigrupo numérico nunca excede a multiplicidade. Vejamos se é possível relacionar $t(S)$ e $e(S)$. Se a dimensão de imersão for igual a dois o semigrupo numérico é do tipo um, pelo Corolário 1.23. Neste caso $t(S) < e(S)$. Veremos mais à frente que esta desigualdade ainda é válida para semigrupos numéricos com dimensão de imersão igual a três, nestes casos, $t(S) = 1$ ou $t(S) = 2$, no entanto, esta propriedade não se generaliza a semigrupos numéricos com mais de três geradores minimais. Num semigrupo numérico com dimensão de imersão superior a três pode ser que $t(S)$ seja maior do que a sua dimensão de imersão, como mostra o exemplo de Backelin (ver em [7]) que a seguir se apresenta:

Exemplo 1.24: Seja $S = \langle s,\ s+3,\ s+3n+1,\ s+3n+2 \rangle$, com $n \geq 2$, $r \geq 3n+2$ e $s = r(3n+2)+3$. Tem-se que $t(S) = 2n+3 \geq 7$.

Se considerarmos, por exemplo, $n = 2$ e $r = 8$, temos $s = 43$ e $S = \langle 67, 70, 74, 75 \rangle$. Logo $e(S) = 4$ e $t(S) = 7$.

Proposição 1.25: Seja S um semigrupo numérico. Então

$$g(S) \leq t(S)n(S).$$

Dem. Seja $x \notin S$. Então, pela Proposição 1.22, existe $f_i \in PF(S)$ tal que $f_i - x \in S$.

Seja $f_x = min\ \{f \in PF(S) \mid f - x \in S\}$ e consideremos a aplicação

$$G(S) \rightarrow PF(S) \times N(S)$$
$$x \rightarrow (f_x, f_x - x).$$

Esta aplicação é injectiva, assim $g(S) \leq t(S)n(S)$. □

Esta desigualdade é equivalente a $F(S) + 1 \leq n(S)[t(S) + 1]$.

De facto, $g(S) + n(S) \leq t(S)\,n(S) + n(S)$, ou seja $g(S) + n(S) \leq n(S)[t(S) + 1]$ donde,

$$F(S) + 1 \leq n(S)[t(S) + 1].$$

H. S. Wilf conjecturou que $F(S) + 1 \leq e(S)n(S)$ (ver [18]). Sabemos que para algumas famílias de semigrupos esta conjectura é válida, no entanto o caso geral continua por provar.

Semigrupos numéricos com máxima dimensão de imersão.

Dizemos que um semigrupo numérico S é um semigrupo com ***máxima dimensão de imersão*** se $m(S) = e(S)$.

Exemplo 1.26: Dado um número inteiro m positivo, o conjunto $S = \{0,\ m, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com máxima dimensão de imersão. De facto, o conjunto Apéry de m em S é $Ap(S,m) = \{0,\ m+1, m+2, \dots, (2m-1)\}$. Tem-se que todos os elementos de $Ap(S,m)$ são maximais, à excepção do zero, uma vez que $0 \leq i < j \leq m-1$, $m+j-(m+i) = j-i < m \notin S$, donde

$$PF(S) = \{\, m+1, m+2, \dots, (2m-1)\}.$$

Nos semigrupos com máxima dimensão de imersão $PF(S)$ tem o maior cardinal possível

$$t(S) = m(S) - 1.$$

De facto, $PF(S) = \{n_2 - n_1, \dots, n_p - n_1\}$. Daqui resulta que $F(S) = n_p - n_1$, e aplicando a Proposição 1.16 (Fórmula de Selmer), obtém-se também o género de S em função dos seus geradores minimais.

Proposição 1.27: Seja S um semigrupo numérico com máxima dimensão de imersão e com sistema minimal de geradores $\{n_1 < \dots < n_p\}$. Então:

1) $F(S) = n_p - n_1$;
2) $g(S) = \frac{1}{n}(n_2 + \dots + n_p) - \frac{n_1 - 1}{2}$.

A Proposição seguinte caracteriza os semigrupos numéricos com máxima dimensão de imersão.

Proposição 1.28: Seja S um semigrupo numérico e $\{n_1 < \dots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores. As proposições seguintes são equivalentes.

1) S é um semigrupo numérico com máxima dimensão de imersão.

2) $Ap(S, n_1) = \{0,\ n_2, \dots, n_p\}$.

3) Se $i, j \in \{2, \dots, p\}$, então $n_i + n_j - n_1 \in S$.

4) Se $x, y \in S \backslash \{0\}$, então $x + y - n_1 \in S$.

Dem. 1) $implica$ 2). Se $i \in \{2, \dots, p\}$, $n_i - n_1 \notin S$, visto n_1 e n_i serem geradores minimais de S. Então, $\{0, n_2, \dots, n_p\} \subseteq Ap(S, n_1)$. Como S tem máxima dimensão de imersão temos $p = n_1$, donde os conjuntos anteriores têm ambos n_1 elementos. Logo concluímos que $Ap(S, n_1) = \{0,\ n_2, \dots, n_p\}$.

2) $implica$ 3). Basta notar que $n_i + n_j \notin Ap(S, n_1)$, assim $n_i + n_j - n_1 \in S$.

3) $implica$ 4) Sejam $x, y \in S\backslash\{0\}$. Tem-se que $x = n_i + s$, para algum $i \in \{1, \dots, p\}$ e $s \in S$, e $y = n_j + s'$, para algum $j \in \{1, \dots, p\}$ e $s' \in S$. Donde $x + y - n_1 = n_i + s + n_j + s' - n_1$. Então $x + y - n_1 = n_i + n_j - n_1 + s + s' \in S$.

4) $implica$ 1). Seja $Ap(S, n_1) = \{0 = w(0), w(1), \dots, w(n_1 - 1)\}$ e suponhamos que existe $i \in \{1, \dots, n_1 - 1\}$ tal que $w(i)$ que não é gerador minimal de S. Então $w(i) = n_j + s$, com $j \in \{2, \dots, p\}$ e $s \in S\backslash\{0\}$. Mas $w(i) - n_1 = n_j + s - n_1 \in S$, por hipótese, o que é um absurdo visto que $w(i) \in Ap(S, n_1)$. Concluímos que todos os elementos de $Ap(S, n_1)$, à excepção do zero, são geradores minimais de S. Portanto $\{n_1\} \cup (Ap(S, n_1)\backslash\{0\})$ é um sistema minimal de S com n_1 elementos. □

Capítulo 2

Apresentação minimal para um semigrupo numérico

2.1. Apresentação minimal para um semigrupo numérico

Neste capítulo, bem como nos seguintes, S denotará um semigrupo numérico finitamente gerado por $\{n_1, \dots, n_p\}$.

Seja φ o homomorfismo de semigrupos, $\varphi\colon \mathbb{N}^p \to S$, definido por

$$\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i n_i ,$$

e σ a congruência kernel de φ, definida por:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p)\, \sigma (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_p) \Leftrightarrow \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = \varphi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_p) .$$

Tem-se

$$S \cong \frac{\mathbb{N}^p}{\sigma} .$$

Nesta secção pretendemos caracterizar e determinar uma ***apresentação minimal para um semigrupo numérico***, que é uma congruência capaz de gerar σ com o menor número de elementos. Para realizar este estudo vamos utilizar alguma teoria de grafos.

Para $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $[n]$ a imagem inversa de n por φ, isto é,

$$[n] = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p \colon \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = n\}.$$

Note-se que o conjunto $[n]$ é finito e $n \in S \setminus \{0\}$ se e só se $[n] \neq \emptyset$.

Em $\mathbb{N}^p$ definimos a seguinte relação:

Dados dois elementos $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ e $b = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_p)$ pertencentes a $\mathbb{N}^p$, dizemos que $a\, \omega\, b$ se e só se $a = b = 0$ ou existem $n \in \mathbb{N}$ e $k_1, \dots, k_t \in [n]$, tais que $a = k_1$ e $b = k_t$ e $k_i | k_{i+1} \neq 0$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Claramente ω é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}^p$. Aos elementos do conjunto quociente $\frac{\mathbb{N}^p}{\omega}$ chamamos ***ω – classes*** e a ω – classe que contém $a \in \mathbb{N}^p$ é denotada por $[\varphi(a)]$.

Observemos que se $a,b \in [n]$, então para $s \in \mathbb{N}^p$, com $s \neq (0,\dots,0)$, tem-se $(a+s)\ \omega\ (b+s)$. De facto, $\varphi(a+s) = \varphi(a) + \varphi(s) = \varphi(b) + \varphi(s) = \varphi(b+s) = n'$, assim $a+s$ e $b+s \in [n']$. Além disso, se $s = (\alpha_1,\dots,\alpha_p) \neq (0,\dots,0)$, então existe $\alpha_i \neq 0$, donde $(a+s)|(b+s) \neq 0$.

Exemplo 2.1: Consideremos $S = \langle 5,8,11,12 \rangle$. A $\omega-$classe de $a = ((0,1,2,0)$ é

$$[\varphi(0,1,2,0)] = \{(0,1,2,0),(2,1,0,1),(6,0,0,0)\} = [30].$$

Observamos que quaisquer dois elementos de $[30]$ estão relacionados por ω.

Se considerarmos $n = 23$, tem-se $[23] = \{(0,0,1,1),\ (3,1,0,0)\}$. Os dois elementos deste conjunto não estão ω-relacionados $((0,0,1,1)|(3,1,0,0) = 0)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por n_ω o número de $\omega-$classes contidas em $[n]$. Assim, relativamente aos dois exemplos anteriores, tem-se $30_\omega = 1$ e $23_\omega = 2$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ e sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$ as distintas $\omega-$classes de $[n]$. Se γ é uma relação binária em $\mathbb{N}^p$, denotamos por

$$\gamma_n = \gamma \cap ([n] \times [n])$$

e denotamos por G_{γ_n} o grafo associado à partição $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ de $[n]$. Os vértices deste grafo são os elementos de $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ e $\overline{X_\iota X_j}$, com $i \neq j$, é uma aresta de G_{γ_n} se existe $x \in X_i$ e $y \in X_j$ tal que $(x,y) \in \gamma \cup \gamma^{-1}$.

Estes grafos irão ser importantes para caracterizar uma apresentação para um semigrupo numérico.

O resultado seguinte dá uma condição necessária e suficiente para que uma relação binária $\gamma \subseteq \sigma$ gere a congruência σ.

Teorema 2.2: Seja S um semigrupo numérico, $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, X_2, \dots, X_r$ as distintas $\omega-$classes de $[n]$. Uma relação binária $\gamma \subset \sigma$ de $\mathbb{N}^p$ gera σ se e só se G_{γ_n} é conexo para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Dem. *Condição suficiente.* Sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$ as distintas $\omega-$classes de $[n]$. Sejam t e $s \in \{1,\dots,r\}$ com $t \neq s$. Provemos que existe em G_{γ_n} um caminho ligando X_t e X_s. Tomemos $k \in X_t$ e $h \in X_s$. Tem-se que $k\sigma h$, uma vez que $h,k \in [n]$. Dado que γ gera σ, isto é, $\bar{\gamma} = \sigma$, existem $b_0, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{N}^p$ tal que que $k = b_0$, $h = b_l$ e $(b_i, b_{i+1}) \in \gamma^1$, para todo o $i \in \{0,1,\dots,l-1\}$. Dado que $(b_i, b_{i+1}) \in \gamma^1$, existem $(x_i, y_i) \in \gamma \cup \gamma^{-1}$ e $z_i \in \mathbb{N}^p$ tal que $(b_i, b_{i+1}) = (x_i + z_i,\ y_i + z_i)$.

Temos então

$$k = b_0 = k_0 + z_0 \,,$$
$$b_i = h_{i-1} + z_{i-1} = k_i + z_i \in [n], \quad i = 1, 2, \dots, l \,,$$
$$b_l = h_{l-1} + z_{l-1} = h.$$

Se $z_i \neq 0$ então $(h_i + z_i)\omega(k_i + z_i)$ e portanto $(h_i + z_i)\omega(h_{i-1} + z_{i-1})$, donde $b_i\omega\, b_{i+1}$.

Se $z_i = 0$, então $(b_i, b_{i+1}) = (k_i, h_i) \in \gamma_n \cup {\gamma_n}^{-1}$. Consequentemente, os elementos b_i determinam um caminho em G_{γ_n} que liga os vértices X_t e X_s.

Condição necessária. Provemos, agora, que γ gera σ, isto é, $\bar{\gamma} = \sigma$. Claro que $\bar{\gamma} \subseteq \sigma$. Basta mostrar que para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $k, k' \in [n]$ então $(k, k') \in \bar{\gamma}$. Usamos indução em $\mathbb{N}$. Se $n = 0$, então $[n] = \{0\}$ e tem-se $(0,0) \in \bar{\gamma}$. Consideremos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para valores menores do que n. Mostremos que o resultado ainda é válido para n. Se $n \notin S$, $[n] = \emptyset$ e o resultado está demonstrado. Consideremos, então, que $n \in S$. Sejam $k, k' \in [n]$. Dois casos se podem dar:

1) $(k, k') \in \omega$;
2) $(k, k') \notin \omega$.

No primeiro caso, têm de existir elementos $k_1 = (k_1^1, \dots, k_p^1), \dots, k_t = (k_1^t, \dots, k_p^t) \in [n]$, tais que $k = k_1$ e $k' = k_t$ e $k_i | k_{i+1} \neq 0$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, t-1\}$. Vejamos que $k_i\, \bar{\gamma}\, k_{i+1}$. Seja $b_j = \min\{k_j^i\,,\ k_j^{i+1}\}$, com $j \in \{1, \dots, p\}$. Dado que $k_i | k_{i+1} \neq 0$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, t-1\}$, tem-se $(b_1, \dots, b_p) \neq (0, \dots, 0)$. Além disso, existem $(b_1^i, \dots, b_p^i)$ e $(b_1^{i+1}, \dots, b_p^{i+1})$ que verificam

$(k_1^i, \dots, k_p^i) = (b_1^i, \dots, b_p^i) + (b_1, \dots, b_p)$,

$(k_1^{i+1}, \dots, k_p^{i+1}) = (b_1^{i+1}, \dots, b_p^{i+1}) + (b_1, \dots, b_p)$ e

$\varphi(b_1^i, \dots, b_p^i) = \varphi(b_1^{i+1}, \dots, b_p^{i+1}) = m$, com $m < n$.

Aplicando a hipótese de indução tem-se que $(b_1^i, \dots, b_p^i)\, \bar{\gamma}\, (b_1^{i+1}, \dots, b_p^{i+1})$ e, como $\bar{\gamma}$ é uma congruência, resulta que

$\big((b_1^i, \dots, b_p^i) + (b_1, \dots, b_p)\big)\ \bar{\gamma}\ \big((b_1^{i+1}, \dots, b_p^{i+1}) + (b_1, \dots, b_p)\big)$, ou seja,

$(k_1^i, \dots, k_p^i)\, \bar{\gamma}\, (k_1^{i+1}, \dots, k_p^{i+1})$. Por transitividade, concluímos que $k\, \bar{\gamma}\, k'$.

No segundo caso, como $(k, k') \notin \omega$, então $n_\omega \geq 2$ e, consequentemente, $\gamma_n \neq \emptyset$. Suponhamos que $n_\omega = r$. Se $(a_1^1, \dots, a_p^1), \dots, (a_1^r, \dots, a_p^r) \in [n]$ são os representantes de cada uma das r ω –classes contidas em $[n]$, então $\gamma_n = \Big\{\big((a_1^1, \dots, a_p^1),\ (a_1^i, \dots, a_p^i)\big) \in [n] \times [n]\,, i = 2, \dots, r\Big\} \subseteq \bar{\gamma}$. Existem, portanto, $i, j \in \{1, \dots, r\}$, com $i \neq j$, que verificam $k\ \omega\ (a_1^i, \dots, a_p^i)$ e $k'\omega(a_1^j, \dots, a_p^j)$. Ora, estamos nas condições do caso anterior, pelo que obtemos que $k\,\bar{\gamma}\ \ (a_1^i, \dots, a_p^i)$ e $k'\bar{\gamma}(a_1^j, \dots, a_p^j)$. Concluímos que $k\,\bar{\gamma}\,k'$. □

Observamos que, se o cardinal de γ é o menor dos cardinais das relações que geram σ, γ diz-se minimal. Vejamos que γ é minimal. Seja β uma relação que também gera σ e suponhamos que $\#\,\beta \leq \#\,\gamma$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\beta_n = \beta \cap [n] \times [n]$. Tem-se $\beta = \cup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ e esta união é disjunta. Como β gera σ, o grafo G_{β_n} é conexo, assim G_{β_n} tem $r-1$ lados, pelo menos, e portanto $\#\,\beta_n \geq r-1 = \#\,\gamma_n$. Logo $\#\,\beta_n = \#\,\gamma_n = r-1$, onde $r=$ número das distintas $\omega-$classes contidas em $[n]$.

Corolário 2.3: Seja S um semigrupo numérico. Um subconjunto γ de σ é uma apresentação minimal (equivalentemente, uma relação minimal) para S se e só se o cardinal de γ_n é igual ao número de ω –classes contidas em $[n]$ menos um e o grafo G_{γ_n} é conexo para todo o $n \in S$.

Atendendo aos resultados anteriores, dada uma relação binária $\gamma \subseteq \sigma$ construimos os grafos G_{γ_n} ($\forall n \in \mathbb{N}$), cujos vértices são os representantes das r ω –classes contidas em $[n]$. Pelo teorema 2.2, γ gera σ se e só se todos estes grafos são conexos e, dado que o menor grafo conexo com r vértices tem $r-1$ arestas, poderemos caracterizar uma apresentação minimal para S.

Assim sendo, para construir uma apresentação minimal para S (ou seja uma relação minimal para σ) basta fixarmo-nos nos elementos n de S tais que o número de ω-classes contidas em $[n]$ é maior ou igual a dois. Consideremos, para $n \in \mathbb{N}$, o grafo conexo G_n com $r-1$ arestas e r vértices: os representantes das r ω -classes contidas em $[n]$,ou seja, $X_1, X_2, \dots, X_r$. Este grafo é o menor grafo conexo que é possível construir com os vértices referidos.

Definimos em $[n]$ a seguinte relação γ_n:

Se $n_\omega \leq 1$, então $\gamma_n = \emptyset$.

Se $n_\omega \geq 2$, sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$, as distintas $\omega-$classes contidas em $[n]$, e a_{ij} e b_{ji}, elementos representativos das $\omega-$classes X_i e X_j, respectivamente. Definimos

$$\gamma_n = \{(a_{ij}, b_{ji}) \mid a_{ij} \in [n] \text{ e } b_{ji} \in [n]\text{, com } \overline{X_\iota X_j} \text{ aresta de } G_n\}$$

Logo, a relação binária $\gamma = \cup_{n\in S} \gamma_n$ é uma relação minimal para σ, uma vez que $\gamma \subseteq \sigma$ e o grafo G_{γ_n} associado a γ é igual a G_n. Assim, atendendo ao Teorema 2.2, γ gera σ.

Em seguida, vamos descrever um método algorítmico para determinar uma apresentação minimal para um semigrupo numérico.

Consideremos $S = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$. Para cada $n \in S$, define-se um novo grafo, G_n, grafo associado a n em S, com vértices V_n e arestas E_n , em que

$$V_n = \{n_i \in \{n_1, \dots, n_p\} \mid n - n_i \in S\},$$

$$E_n = \{\overline{n_i n_j} \mid n - (n_i + n_j) \in S, \qquad i,j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j\}.$$

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$ são as distintas $\omega -$ classes de $[n]$. Denotamos por A_i , com $i \in \{1, \dots, r\}$, o subconjunto de $\{n_1, \dots, n_p\}$ constituído da seguinte forma:

$$A_i = \{ n_j \colon \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots \alpha_p) \in X_i, \text{ com } \alpha_j \neq 0 \}.$$

Temos que $A_i \subseteq V_n$, para todo o $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Além disso, estes conjuntos contêm todos os vértices de G_n.

Exemplo 2.4: Retomando o semigrupo numérico $S = \langle 5, 8, 11, 12 \rangle$, do exemplo 2.1, e considerando novamente $n = 23$ tem-se

$[23] = \{(0,0,1,1), (3,1,0,0)\}$. Então $V_{23} = \{5, 8, 11, 12\}$ e sabemos que existem duas ω –classes em [23]:

$$X_1 = \{(0,0,1,1)\} \text{ e } X_2 = \{(3,1,0,0)\}.$$

Assim, $A_1 = \{11, 12,\}$ e $A_2 = \{5, 8\}$.

Usando a notação anterior, temos os seguintes lemas.

Lema 2.5: O conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ é uma partição de V_n.

Dem. Vejamos, em primeiro lugar, que

$$V_n = \bigcup_{i=1}^{r} A_i.$$

Se $n_j \in V_n$, tem-se que $n - n_j \in S$, donde existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots \alpha_p) \in [n]$ tal que $\alpha_j \neq 0$, ou seja, existe uma $\omega -$ classe X_i de $[n]$, tal que $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots \alpha_p) \in X_i$, com $\alpha_j \neq 0$. Consequentemente, $n_j \in A_i$.

Provemos agora que $A_i \cap A_k = \emptyset$, qualquer que seja $i \neq k$.

Consideremos que $A_i \cap A_k \neq \emptyset$, com $i \neq k$, e seja $n_j \in A_i \cap A_k$. Então, existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots \alpha_p) \in X_i$, com $\alpha_j \neq 0$ e existe $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_j, \dots \bar{\alpha}_p) \in X_k$, com $\bar{\alpha}_j \neq 0$. Temos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots \alpha_p) | (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_j, \dots \bar{\alpha}_p) \neq 0$ e, consequentemente, $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots \alpha_p) \ \omega \ (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_j, \dots \bar{\alpha}_p)$. Assim, $X_i = X_k$, donde $i = k$. □

Vejamos, em seguida, que não existe nenhuma aresta em G_n ligando um vértice em A_i com um vértice em A_j, se $i \neq j$.

Lema 2.6: Seja $n \in S$, $n_k \in A_i$ e $n_t \in A_j$, $i \neq j$. Então, $\overline{n_k n_t} \notin E_n$.

Dem. Suponhamos que $k < t$. Consideremos, com vista a um absurdo, que $\overline{n_k n_t} \in E_n$.

Tem-se que $n-(n_k+n_t) \in S$ logo, existe $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_t, \dots, a_p) \in [n]$, com $a_k \neq 0$ e $a_t \neq 0$. Ora, visto que $n_k \in A_i$ e $n_t \in A_j$, existem $(b_1, \dots, b_k, \dots, b_p) \in X_i$ e $(c_1, \dots, c_t, \dots, c_p) \in X_j$, com $b_k \neq 0\ e$.

Tem-se, assim, que

$(a_1, \dots, a_k, \dots, a_t \dots, a_p)\omega(b_1, \dots, b_k, \dots, b_p)$

e $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_t \dots, a_p)\omega(c_1, \dots, c_t, \dots, c_p)$.

Logo, $(b_1, \dots, b_k, \dots, b_p)\omega\ (c_1, \dots, c_t, \dots, c_p)$, donde $X_i = X_j$, e portanto $i = j$, o que é absurdo .□

Por último, mostremos que dados quaisquer dois vértices de A_i existe sempre um caminho que os liga.

Lema 2.7: Se n_k e $n_l \in A_s$, com $k \neq l$, existe um caminho em G_n com vértices em A_s ligando n_k a n_l.

Dem. Consideremos n_k e $n_l \in A_s$. Então, existem elementos $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_p)$ e $(b_1, \dots, b_l, \dots, b_p)$ pertencentes a X_s, com a_k e b_l diferentes de zero, e tem-se que $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_p)\ \omega\ (b_1, \dots, b_l, \dots, b_p)$. Logo existem elementos $(a_1^1, \dots, a_p^1), \dots, (a_1^q, \dots, a_p^q) \in [n]$ tal que $(a_1^1, \dots, a_p^1) = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_p)$, $(a_1^q, \dots, a_p^q) = (b_1, \dots, b_l, \dots, b_p)$ e $(a_1^i, \dots, a_p^i)|(a_1^{i+1}, \dots, a_p^{i+1}) \neq 0$. Tem-se, então, $(a_1^1, \dots, a_p^1)|(a_1^2, \dots, a_p^2) \neq 0$, … , $(a_1^i, \dots, a_p^i)|(a_1^{i+1}, \dots, a_p^{i+1}) \neq 0$, $(a_1^{i+1}, \dots, a_p^{i+1})|(a_1^{i+2}, \dots, a_p^{i+2}) \neq 0$, …, $(a_1^{q-1}, \dots, a_p^{q-1})|(a_1^q, \dots, a_p^q) \neq 0$. Assim, para cada $i \in \{1, \dots, q\}$ existe $k_i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $a_{k_i}^i . a_{k_i}^{i+1} \neq 0$.

Vejamos em seguida que $\overline{n_{k_i} n_{k_{i+1}}} \in E_n$. De facto, visto que $(a_1^i, \dots, a_p^i)|(a_1^{i+1}, \dots, a_p^{i+1}) \neq 0$ e $(a_1^{i+1}, \dots, a_p^{i+1})|(a_1^{i+2}, \dots, a_p^{i+2}) \neq 0$, temos que $a_{k_i}^i . a_{k_i}^{i+1} \neq 0$. Então $a_{k_i}^{i+1} \neq 0$ e $a_{k_i+1}^{i+1} . a_{k_{i+1}}^{i+2} \neq 0$, portanto $a_{k_i+1}^{i+1} \neq 0$, com k_i, $k_{i+1} \in \{1, \dots, p\}$. Então $(a_1^{i+1}, \dots, a_{k_i}^{i+1}, a_{k_i+1}^{i+1}, \dots\ a_p^{i+1}) \in [n]$, com $a_{k_i}^{i+1} \neq 0$ e $a_{k_{i+1}}^{i+1} \neq 0$, o que nos permite concluir que $n-(n_{k_i}+n_{k_{i+1}}) \in S$ e, assim, $\overline{n_{k_i} n_{k_{i+1}}} \in E_n$. Repetindo este procedimento para todos os $q-1$ pares da sequência anterior, obtemos um caminho $\overline{n_{k_1}n_{k_2}}$, $\overline{n_{k_2}n_{k_3}}$, ..., $\overline{n_{k_i}n_{k_{i+1}}}$, ..., $\overline{n_{k_{q-1}}n_{k_q}}$, em que $n_{k_1} = n_k$ e $n_{k_q} = n_l$. Obtemos, assim, uma sequência nas condições pretendidas.□

Face ao exposto, temos que os conjuntos dos vértices de cada componente conexa de G_n são $A_1, \dots, A_r$. Assim, o número de componentes conexas de G_n é igual ao número de $\omega -$ classes contidas em $[n]$.

Teorema 2.8: Seja S um semigrupo numérico e $n \in S \backslash \{0\}$. O número de componentes conexas de G_n é igual ao número de $\omega -$ classes contidas em $[n]$.

Dem. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_r$ as distintas $\omega -$classes de $[n]$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, definimos o subgrafo $G_n^i = (V_n^i, E_n^i)$ de G_n do seguinte modo: $V_n^i = A_i$ e $E_n^i = \{\overline{n_i n_j} \mid n_i,\ n_j \in A_i\}$. Pelos Lemas 2.5, 2.6 e 2.7, concluímos que G_n^1, $G_n^2, \dots$, G_n^r são as componentes conexas de G_n.□

Observemos que para obter uma relação mínima para σ, temos de nos preocupar apenas com aqueles elementos de S para os quais o grafo G_n tem mais do que uma componente conexa, ou seja, com os elementos $n \in S \backslash \{0\}$ tal que G_n é não conexo. Para cada um destes valores de n, construímos o grafo que lhe está associado, e em cada uma das r componentes de G_n, ou seja, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, escolhemos um vértice n_{k_i} pertencente a V_n^i e um elemento $a^i = (a_1^i, \dots, a_p^i) \in [n]$, com $a_{k_i}^i \neq 0$. Então, $[a^1]_\omega$, ... , $[a^r]_\omega$ são as r distintas $\omega -$ classes contidas em $[n]$ e podemos definir $\gamma_n = \{(a^1, a^2), \dots, (a^1, a^r)\}$.

Proposição 2.9: Seja S um semigrupo numérico, $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores e $s \in S$. Então existe uma única expressão

$$s = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i n_i$$

com $\alpha_{i+1}n_{i+1} + \dots + \alpha_p n_p \in Ap(S, n_1) \cap Ap(S, n_2) \cap \dots \cap Ap(S, n_{i+1})$, para todo o $i \in \{1, \dots, p-1\}$.

Dem. Seja $s \in S$. Utilizando o Lema 1.13, tem-se que $s = \alpha_1 n_1 + w_1$, com $w_1 \in Ap(S, n_1)$ e $w_i = \alpha_{i+1}n_{i+1} + w_{i+1}$ com $w_{i+1} \in Ap(S, n_1) \cap Ap(S, n_2) \cap \dots \cap Ap(S, n_i)$. Uma vez que os pares ordenados (α_i, w_i) são únicos, concluímos a unicidade da expressão $s = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \dots + \alpha_p n_p$. □

Definição 2.10: A expressão $s = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 \dots + \alpha_p n_p$, referida na Proposição 2.9 é chamada a forma canónica de s para a ordenação dos geradores $n_1, n_2, \dots, n_p$.

Necessitamos, então, de saber quais os valores de n para os quais G_n é não conexo. Isto é possível utilizando a seguinte propriedade:

Teorema 2.11: Seja S um semigrupo numérico, $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores e $n \in S\backslash\{0\}$. Se G_n é não conexo então $n = w + n_j$, com $w \in Ap(S, n_1)\backslash\{0\}$ e $j \in \{2, \dots, p\}$.

Dem. Seja $n \in S$ tal que G_n é não conexo. Observamos, em primeiro lugar, que n não pode ser gerador minimal, caso contrário o grafo associado é conexo (reduz-se a um vértice). Consideremos, então, $n \neq n_i$, com $i \in \{1, \dots, p\}$. Vamos supor que: $n - n_1 \notin S$ ou $n - n_1 \in S$.

Se $n - n_1 \notin S$, então $n = w \in Ap(S, n_1)\backslash\{0\}$. Como G_n é não conexo, $V_n \neq \emptyset$, obtemos que existem $i, j \in \{2, \dots, p\}$, com $i \neq j$, tal que $\overline{n_i n_j} \notin E_n$. Donde $n = (n - n_j) + n_j$ e $n - n_j \in Ap(S, n_1)\backslash\{0\}$. De facto, se $n - n_j \notin Ap(S, n_1)\backslash\{0\}$, temos que $n - n_j - n_1 \in S$, ou seja, $n = (n_j + n_1) + s$, com $s \in S$, e , consequentemente, $n \notin Ap(S, n_1)\backslash\{0\}$, o que contradiz a hipótese.

Se $n - n_1 \in S$, então $n_1 \in V_n$. Mas, como o grafo G_n é não conexo, podemos considerar n_j pertencente a outra componente conexa de G_n. Donde $n = (n - n_j) + n_j$ e $(n - n_j) - n_1 \notin S$ e $n - n_j \in S$, portanto $n - n_j \in Ap(S, n_1)\backslash\{0\}$. □

Passemos, agora, à descrição do procedimento que permite obter uma apresentação minimal para o semigrupo numérico S.

Método algorítmico 2.12: Para determinar uma apresentação minimal ρ para um semigrupo numérico S devemos percorrer as etapas seguintes:

1) Determinamos $Ap(S, n_1)$

2) Determinamos $(Ap(S, n_1)\backslash \{0\}) + \{n_2, \dots, n_p\}$.

3) Para cada elemento $n \in (Ap(S, n_1)\backslash \{0\}) + \{n_2, \dots, n_p\}$, construímos o grafo G_n .

4) Para cada grafo G_n não conexo obtido na etapa anterior, escolhemos um vértice n_i em cada uma das suas r componentes conexas e expressamos n

na forma canónica para a ordenação dos geradores $n_i, n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_p$. (Observe-se que nesta representação podem aparecer apenas vértices desta componente conexa.)

5) Definimos

$$\rho_n = \{ (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_1, \alpha_r)\}.$$

6) Definimos

$$\rho = \bigcup \rho_n$$

Nota: Tem-se que $\# \rho_n$ é igual ao número de componentes conexas de G_n menos um.

Exemplo 2.13: Determinar uma apresentação minimal para o semigrupo numérico $S = \langle 5, 8, 11, 12 \rangle$.

Começamos por determinar S e $F(S)$ e o conjunto Apéry relativamente a 5.

Então $S = \{ 0, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, \rightarrow\}$; $F(S) = 14$ e $Ap(S,5) = \{ 0, 8, 11, 12, 19 \}$.

Determinamos $(Ap(S,5)\backslash\{0\}) + \{ 8, 11, 12 \} = \{ 16, 19, 20, 22, 23, 24, 27, 30, 31 \}$.

Estudamos os grafos G_n com n pertencente ao conjunto anterior. Para cada valor de n obtém-se

Grafo	Componentes conexas	Expressão de n
G_{16}	$\{8\}, \{5, 11\}$	$2 \times 8 = 5 + 11$
G_{19}	$\{8, 11\}$	
G_{20}	$\{5\}, \{8, 12\}$	$4 \times 5 = 8 + 12$
G_{22}	$\{11\}, \{5, 12\}$	$2 \times 11 = 2 \times 5 + 12$
G_{23}	$\{5, 8\}, \{11, 12\}$	$3 \times 5 + 8 = 11 + 12$
G_{24}	$\{5, 8, 11\}, \{12\}$	$3 \times 8 = 5 + 8 + 11 = 2 \times 12$
G_{27}	$\{5, 8, 11, 12\}$	
G_{30}	$\{5, 8, 11, 12\}$	
G_{31}	$\{5, 8, 11, 12\}$	

Para $n = 24$, podemos escrever duas expressões de n que envolvem o vértice 8. Neste caso escolhemos uma delas para representar os elementos da componente conexa onde pertence este vértice e definir a relação pretendida. Portanto, uma relação minimal para S é

$$\rho = \{((0,2,0,0),(1,0,1,0)),((4,0,0,0),(0,1,0,1)),((0,0,2,0),(2,0,0,1)),$$
$$\big((3,1,0,0),(0,0,1,1)\big),\big((0,3,0,0),(0,0,0,2)\big)\big\}.$$

2.2. Apresentação minimal para um semigrupo numérico com dois geradores minimais

Exemplo 2.14: Seja S semigrupo numérico e $\{a,b\}$ o seu sistema minimal de geradores. Vejamos que

$\delta = \{((b,0),(0,a))\}$ é uma apresentação minimal para S.

Com efeito,

$$Ap(S,a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}.$$

Logo,

$$Ap(S,a)\backslash\{0\} + \{b\} = \{2b, 3b, \dots, ab\}.$$

Visto que $m.d.c.(a,b) = 1$, os $a-1$ elementos de $Ap(S,a)\backslash\{0\} + \{b\}$ têm todos grafos associados conexos, à excepção de ab, cujo grafo associado tem duas componentes conexas: $\{a\}$ e $\{b\}$, uma vez que $ab = b.a + 0.b = 0.a + a.b$.

Assim,

$$\delta = \{((b,0),(0,a))\}.$$

2.3 Apresentação minimal para um semigrupo numérico com três geradores minimais

Seja S semigrupo numérico e $\{n_1, n_2, n_3\}$ o seu sistema minimal de geradores. Para cada $i \in \{1,2,3\}$, definimos

$$c_i = \min\{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \mid kn_i \in \langle n_j, n_t\rangle, \text{com } \{i,j,t\} = \{1,2,3\}\ e\ j \neq t\}.$$

Dado $n \in S$, o grafo associado a n é não conexo apenas se $n \in \{c_1n_1,\ c_2n_2,$ $c3n3$. Vamos distinguir três casos:

Se $c_1n_1 = c_2n_2 = c_3n_3$, tem-se

$$\delta = \{((c_1,0,0),(0,c_2,0)),((c_1,0,0),(0,0,c_3))\}.$$

Se $c_1n_1 = r_{1_2}n_2 + r_{1_3}n_3$ e $c_2n_2 = c_3n_3 \neq c_1n_1$, tem-se

$$\delta = \left\{\left((c_1,0,0),\left(0,r_{1_2},r_{1_3}\right)\right),((0,c_2,0),(0,0,c_3))\right\}.$$

A finalizar, se o cardinal de $\{c_1n_1,\ c_2n_2,\ c_3n_3\}$ é três, tem-se

$$c_1n_1 = r_{1_2}n_2 + r_{1_3}n_3,$$

$$c_2n_2 = r_{2_1}n_1 + r_{2_3}n_3,$$

$$c_3n_3 = r_{3_1}n_1 + r_{3_2}n_2.$$

Obtemos neste caso

$$\delta = \left\{\left((c_1,0,0),\left(0,r_{1_2},r_{1_3}\right)\right),\left((0,c_2,0),\left(r_{2_1},0,r_{2_3}\right)\right),\left((0,0,c_3),\left(r_{3_1},r_{3_2},0\right)\right)\right\}.$$

Exemplo 2.15: Os semigrupos $\langle 6,10,15\rangle$, $\langle 6,7,9\rangle$ e $\langle 5,6,8\rangle$, são exemplos dos três casos anteriores.

De facto, se $S = \langle 6,10,15\rangle$, temos que $\{c_1n_1,\ c_2n_2,\ c_3n_3\} = \{30\}$, então

$$\delta = \{((5,0,0),(0,3,0)),((5,0,0),(0,0,2))\}.$$

Se $S = \langle 6,7,9\rangle$, temos que $\{c_1n_1,\ c_2n_2,\ c_3n_3\} = \{3\times 6,\ 3\times 7,\ 2\times 9\}$, donde

$$3\times 6 = 2\times 9 \ e \ 3\times 7 = 2\times 6 + 1\times 9.$$

Obtemos

$$\delta = \{((3,0,0),(0,0,2)),((0,3,0),(2,0,1))\}.$$

Se $S = \langle 5,6,8\rangle$, temos $c_1n_1 = 20$, $c_2n_2 = 18$ e $c_3n_3 = 16$.

Assim,

$$20 = 4\times 5 = 2\times 6 + 1\times 8,$$

$$18 = 3\times 6 = 2\times 5 + 1\times 8,$$

$$16 = 2\times 8 = 2\times 5 + 1\times 6.$$

Então,

$$\delta = \{((4,0,0),(0,2,1)),((0,3,0),(2,0,1)),((0,0,2),(2,1,0))\}.$$

Capítulo 3

Limite superior para o cardinal de uma apresentação minimal

A partir de Herzog [9] e de Rosales [11], temos que o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico é sempre maior ou igual à sua dimensão de imersão menos um e que são os semigrupos numéricos que são intersecção completa que atingem o menor cardinal. Além disso, Bresinsky [6] mostra que o cardinal de uma apresentação minimal não pode ser limitado superiormente somente em termos da dimensão de imersão do semigrupo numérico. Neste capítulo, vamos estabelecer uma quota para o cardinal de uma apresentação para um semigrupo numérico em função da multiplicidade e da dimensão de imersão do semigrupo numérico. Mostraremos que, no conjunto de todos os semigrupos numéricos com uma dada multiplicidade, são os semigrupos numéricos com máxima dimensão de imersão que admitem uma apresentação minimal com o maior número de elementos.

Começamos este estudo determinando o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico com máxima dimensão de imersão, ou seja, $m(S) = e(S)$.

Denotamos o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico por $\# \, RMS$.

Teorema 3.1: Seja S um semigrupo numérico com sistema minimal de geradores $\{n_1,\ n_1+1, \dots n_1+(n_1-1)\}$. Então o cardinal de apresentação minimal para S é igual a

$$\frac{n_1(n_1-1)}{2}.$$

Dem. Denotemos $n_1 = n_1,\ n_2 = n_1 + 1,\ \dots, n_{n_1} = n_1 + (n_1 - 1)$. Dado que $n_1 = e(S) = m(S)$, tem-se $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, \dots, n_{n_1}\}$.

Seja $n \in S$ tal que G_n é não conexo então, aplicando o Teorema 2.11 obtemos $n = w + n_i$, com $w \in (Ap(S, n_1) \setminus \{0\})$ e $n_i \in \{n_2, \dots, n_{n_1}\}$, ou seja, $n = n_i + n_j$, com

$i,\ j \in \{2, \dots, n_1\}$. Portanto, dois casos se podem dar: $n = n_i + n_j$, com $i \neq j$ e $i,\ j \in \{2, \dots, n_1\}$, ou $n = 2n_i$, $i \in \{2, \dots, n_1\}$. No primeiro caso,

$$\boxed{n_i \circ \!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\ n_j}$$

é uma componente conexa de G_n. De facto, se existir outro vértice, n_k, nesta componente conexa, temos que $\overline{n_i n_k}$ (ou $\overline{n_j n_k}$) é outra aresta de G_n. Obtemos que $n_i + n_j - (n_i + n_k) \in S$, ou seja, $n_j - n_k \in S$ e, consequentemente, $n_j = n_k$. Analogamente, se $\overline{n_j n_k}$ for uma aresta de G_n, temos $n_i + n_j - (n_j + n_k) \in S$ e, portanto, $n_i = n_k$.

No segundo caso,

$$\boxed{\quad n_i \circ \quad}$$

é uma componente conexa de G_n. Se existir outro vértice, n_k, nesta componente conexa, temos que $\overline{n_i n_k}$ é uma aresta de G_n. Obtemos que $2n_i - (n_i + n_k) \in S$, ou seja, $n_i - n_k \in S$ e, consequentemente, $n_i = n_k$.

Mostremos que G_n é não conexo nos casos anteriores. Se $n = n_i + n_j$, com $i \neq j$ e $i,\ j \in \{2, \dots, n_1\}$, uma vez que $n = n_i + n_j \notin Ap(S, n_1)$, tem-se $n - n_1 \in S$, o que significa que $n_1 \in V_n$. Suponhamos que n_i (ou n_j) e n_1 estão na mesma componente conexa. Donde $\overline{n_1 n_i} \in E_n$, assim $n_i + n_j - (n_1 + n_i) \in S$, ou seja, $n_j - n_1 \in S$, o que é absurdo visto que $n_j \in Ap(S, n_1)$. Se $n = 2n_i$, a situação é análoga.

Isto prova que G_n é não conexo se e só se $n = n_i + n_j$, com $i,\ j \in \{2, \dots, n_1\}$. Além disso, G_n tem uma componente conexa correspondente ao vértice n_1 e outra correspondente aos vértices n_i e n_j. Portanto, uma apresentação minimal para S tem tantos elementos quantas as expressões da forma $n_i + n_j$, com $i,\ j \in \{2, \dots, n_1\}$, isto é, as combinações com repetição de $n_1 - 1$ elementos dois a dois, ou seja,

$$\# RMS = \frac{(n_1 - 1)(n_1 - 2)}{2} + (n_1 - 1) = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2},$$

o que conclui o pretendido. □

Seja S um semigrupo numérico e $\{n_1 < n_2 < \dots < n_{n_1}\}$ o seu sistema minimal de geradores. Dado que $e(S) = m(S)$, tem-se $Ap(S, n_1) = \{0, n_2, \dots, n_{n_1}\}$, pela Proposição 1.28. Podemos, assim, generalizar a propriedade anterior.

Teorema 3.2: Seja S um semigrupo numérico tal que $e(S) = m(S)$.

Então o cardinal de qualquer apresentação minimal para S é igual a

$$\frac{m(S)(m(S) - 1)}{2}.$$

Vamos, agora, estudar os semigrupos numéricos que não têm necessariamente máxima dimensão de imersão.

Seja S um semigrupo numérico e $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores, com $p < n_1 < F(S)$. Sabemos que $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$ é também um semigrupo numérico, pela Proposição 1.9. Além disso, dado que $F(S) > n_1$, temos que $m(\bar{S}) = n_1$. Mostramos, seguidamente, que é possível obter uma relação mínima para $\bar{S}$ partindo de uma relação mínima para S, suprimindo algumas relações e acrescentando outras. Para realizar este estudo iremos distinguir dois casos, que estudaremos separadamente, consoante $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é, ou não, um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Veremos que, se $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$, o cardinal de uma apresentação minimal para $\bar{S}$ excede o de uma apresentação para S entre duas a $p+1$ relações, e que no caso contrário esse número é igual ao de uma apresentação para S.

Denotamos o número de componentes conexas de um grafo G_n , com $n \in \mathbb{N}$, por $Ncc(G_n)$.

Lema 3.3: Seja $S = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$, com $n_1 < F(S)$, e $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$, verificando que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Se $n \in S$, então

1) $n \in Ap(\bar{S}, F(S)) \Rightarrow G_n = \bar{G}_n$.

2) $n \notin Ap(\bar{S}, F(S)) \Rightarrow V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$.

3) $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n \Rightarrow$ existe $n_i \in \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ tal que $n = F(S) + n_i$.

4) $[Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$ e $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n] \Rightarrow n = 2F(S)$.

5) $[Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$ e $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n] \Rightarrow$

$\Rightarrow n = F(S) + n_1 + n_i$, para algum $i \in \{2, \dots, p\}$, e com n_1 e n_i em componentes conexas distintas de G_n.

Dem. (1) e (2) são imediatas.

(3) Se $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n$ então existe $n_i \in \{n_1, \dots, n_p\}$ tal que $n - n_i \in (\bar{S} \setminus S)$, donde $n = F(S) + n_i$.

(4) Por hipótese, $F(S)$ é o único vértice de $\bar{V}_n$ que não está em V_n. Portanto o grafo $\bar{G}_n$ pode ser obtido a partir de G_n juntando-lhe o vértice $F(S)$ e algumas

arestas. No entanto, $\bar{G}_n$ não pode ter nenhuma aresta com vértice $F(S)$, caso contrário $Ncc(\bar{G}_n) \leq Ncc(G_n)$. Tem-se $n - F(S) \in \bar{S}$, assim $n = F(S) + s$, com $s \in \bar{S}\backslash\{0\}$. Além disso, uma vez que $n - (n_i + F(S)) \notin \bar{S}$, visto que $F(S)$ é único na sua componente conexa, tem-se que $s = F(S)$ (se $s \in S\backslash\{0\}$, $s = n_i + s'$, com $s' \in S$, tem-se $n - (n_i + F(S)) \in S$). Logo $n = 2F(S)$.

(5) Por hipótese, $F(S)$ é o único vértice de $\bar{V}_n$ que não está em V_n. Assim o grafo $\bar{G}_n$ pode ser obtido a partir de G_n juntando-lhe o vértice $F(S)$ e algumas arestas que serão da forma $\overline{n_i n_j}$ ou $\overline{F(S)n_i}$, com n_i , $n_j \in V_n$. Se $\overline{n_i n_j}$ é uma nova aresta, $n -(n_i+n_j) \in (\bar{S} \backslash S)$, então $n = n_i+n_j + F(S)$, donde $\overline{F(S)\, n_i}$ e $\overline{F(S)\, n_j}$ também pertencem a $\bar{E}_n$. Assim, relativamente ao número de componentes conexas de $\bar{G}_n$, basta juntar a G_n as arestas da forma $\overline{F(S)\, n_i}$.

Tem-se $n = F(S) + s$, com $s \in \bar{S}\backslash\{0\}$, visto que $F(S) \in \bar{V}_n$, então $n \geq F(S) + n_1 > F(\bar{S}) + n_1$ o que implica que $n \notin Ap(\bar{S}, n_1)$, donde $n_1 \in \bar{V}_n$. Visto que $\bar{V}_n = V_n \cup \{F(S)\}$ e $F(S) \neq n_1$, tem-se $n_1 \in V_n$.

Além disso, $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$, portanto $Ncc(G_n) \geq 2$. Consideremos $n_i \in V_n$ tal que n_1 e n_i estejam em diferentes componentes conexas de G_n e $n - (F(S) + n_i) \in \bar{S}$. Tem-se que $n = n_i + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$ visto que $n - (n_1 + n_i) = (n - n_i) - n_1 \notin S$. Então $n_i + w = F(S) + n_i + s$, com $s \in \bar{S}\backslash\{0\}$ ($s \neq 0$ porque se $s = 0$ $\Rightarrow w = F(S)$). Assim, $w = F(S) + s \geq F(S) + n_1$, por outro lado $w \leq F(S) + n_1$, uma vez que $w \in Ap(S, n_1)$. Donde $w = F(S) + n_1$.

Logo $n = F(S) + n_1 + n_i$, para algum $i \in \{2, \ldots, p\}$, com n_1 e n_i em componentes conexas distintas de G_n. □

Lema 3.4: Seja $S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_p \rangle$, com $n_1 < F(S)$, e $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$, verificando que $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Seja $n \in S$. As condições seguintes são equivalentes:

1) $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$.

2) $n \in \{F(S) + n_1, \ldots, F(S) + n_p, 2F(S)\}$.

3) $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) + 1$.

Dem. 1) *implica* 2). Se $G_n \neq \bar{G}_n$, aplicando 1) do Lema 3.3, tem-se que $n \notin Ap(\bar{S}, F(S))$. Então, novamente por (1) e (2) do Lema 3.3 obtém-se $F(S) \in \bar{V}_n$ e $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Se $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n$, então existe um $n_i \in \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ tal que $n = F(S) + n_i$, por 3) do Lema 3.3, uma vez mais.

2) $implica$ 3). Seja $n = F(S) + n_i$, com $i \in \{1, \dots, p\}$. Mostremos que o grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se a partir de G_n juntando-lhe apenas os vértices $F(S)$ e n_i, e a aresta $\overline{F(S)\, n_i}$. Assim, concluiremos que $\bar{G}_n$ tem mais uma componente conexa do que G_n.

Notemos que $G_n \neq \emptyset$, visto que $n \in S\backslash\{0\}$, e que $n_i \notin V_n$ (porque $n - n_i \notin S$).

Vejamos que $V_n \cup \{n_i, F(S)\} = \bar{V}_n$. É imediato que $V_n \cup \{n_i, F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Mostremos que esta inclusão não pode ser estrita, o que prova a igualdade. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $V_n \cup \{n_i, F(S)\} \subset \bar{V}_n$. Nesta situação, existe $n_j \in \bar{V} \setminus (V_n \cup \{n_i, F(S)\})$, e portanto $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$, ou seja, $n = F(S) + n_i = F(S) + n_j$, donde $n_i = n_j$, o que é um absurdo.

Vejamos, agora, que $\bar{E}_n = E_n \cup \{\overline{F(S)\, n_i}\}$. É claro que $E_n \cup \{\overline{F(S)\, n_i}\} \subseteq \bar{E}_n$. Mostremos que esta inclusão não pode ser estrita, o que prova a igualdade. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $E_n \cup \{\overline{F(S)\, n_i}\} \subset \bar{E}_n$. Se $n - (n_j + n_k) \in (\bar{S} \setminus S)$, então $n - (n_j + n_k) = F(S)$, donde $n = F(S) + n_j + n_k$, ou seja, $F(S) + n_i = F(S) + n_j + n_k$ e, consequentemente, $n_i = n_j + n_k$, o que é um absurdo visto que $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ é um sistema minimal de geradores de S

Se $n - (F(S) + n_j) \in \bar{S}$, então $n = F(S) + n_j + s$, com $s \in \bar{S}\backslash\{0\}$, ou seja, $F(S) + n_i = F(S) + n_j + s$. Assim, $n_i = n_j + s$ e, portanto, $n_i = n_j$, visto que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores de $\bar{S}$.

Concluímos assim, o grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se a partir de G_n juntando-lhe uma componente conexa cujos vértices são $F(S)$ e n_i.

Agora, seja $n = 2F(S)$. Tem-se que $G_n \neq \emptyset$, visto que $n \in S$.

Vejamos que $V_n \cup \{ F(S)\} = \bar{V}_n$. É imediato que $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Suponhamos que $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n$. Se $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$, então $n = 2F(S) = F(S) + n_j$, ou seja, $F(S) = n_j$, o que é absurdo.

Vejamos agora que $\bar{E}_n = E_n$. É claro que $E_n \subseteq \bar{E}_n$. Suponhamos que $E_n \subset \bar{E}_n$.

Se $n - (F(S) + n_j) \in \bar{S}$, existe $s \in \bar{S}$ tal que $n = 2F(S) = F(S) + n_j + s$, logo $F(S) = n_j + s$, o que é absurdo porque $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores de $\bar{S}$. Se $n - (n_j + n_k) \in (\bar{S} \setminus S)$, tem-se que $n = 2F(S) = n_j + n_k + F(S)$, donde $F(S) = n_j + n_k$, o que é absurdo pela razão anterior, também.

Concluímos assim, que o grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se a partir de G_n juntando-lhe uma componente conexa com um único vértice: $F(S)$.

3) $implica$ 1). É imediata. □

Lema 3.5: Seja $S = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$, com $n_1 < F(S)$, e $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$, verificando que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Seja $n \in S$. As condições seguintes são equivalentes:

1) $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$.

2) $n = F(S) + n_1 + n_i$, para algum $i \in \{2, \dots, p\}$, e com n_1 e n_i em componentes conexas distintas de G_n.

3) $Ncc(G_n) = Ncc(\bar{G}_n) + 1$.

Dem. 1) *implica* 2). Se $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$ então $G_n \neq \bar{G}_n$, donde $n \notin Ap(\bar{S}, F(S))$ e portanto $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. De facto, verifica-se a igualdade, uma vez que se $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n$, existiria $n_j \in \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ tal que $n = F(S) + n_j$ ((3) do Lema 3.3) , donde, pelo Lema 3.4 teríamos $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$. Mas, se $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n$ e $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$, aplicando 5) do Lema 3.3, concluímos que $n = F(S) + n_1 + n_i$, para algum $i \in \{2, \dots, p\}$, e n_1 e n_i em componentes conexas distintas de G_n.

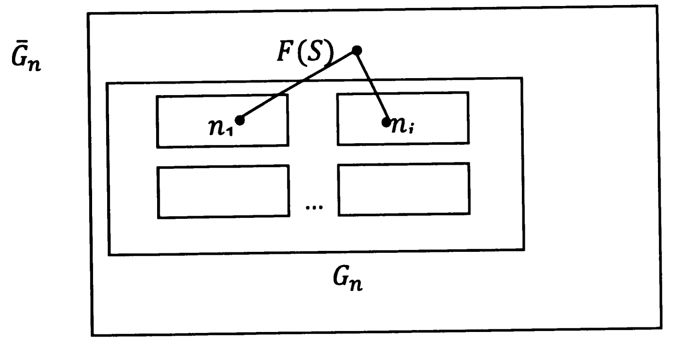
2) *implica* 3). Vejamos que $\bar{V}_n = V_n \cup \{F(S)\}$. Se $n = F(S) + n_1 + n_i$, então $F(S) \in \bar{V}_n$, e portanto $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Se existisse $n_j \in \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ tal que $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$, então $n = F(S) + n_j$, ou seja, $F(S) + n_1 + n_i = F(S) + n_j$, e portanto $n_1 + n_i = n_j$, o que é absurdo. Portanto a inclusão anterior não pode ser estrita, o que prova a igualdade $\bar{V}_n = V_n \cup \{F(S)\}$.

Estudemos agora as arestas de $\bar{G}_n$. Se $\overline{n_j n_k} \in (\bar{E}_n \setminus E_n)$ tem-se $n - (n_j + n_k) = F(S)$, donde $n = F(S) + n_j + n_k$ e portanto $\overline{F(S) n_j} \in \bar{E}_n$ e $\overline{F(S) n_k} \in \bar{E}_n$. Logo para calcular o número de componentes conexas de $\bar{G}_n$, em função do de G_n, basta juntar a G_n os lados da forma $\overline{F(S) n_j}$.

Por hipótese, $n = F(S) + n_1 + n_i$, assim n_1 e n_i estão em componentes conexas distintas em G_n e na mesma componente conexa em $\bar{G}_n$, donde $Ncc(\bar{G}_n) \leq Ncc(G_n) + 1$. Vejamos que não existe n_k pertencente a uma componente conexa distinta de n_1 e de n_i, tal que $\overline{F(S) n_k} \in \bar{E}_n$. Se existisse n_k nestas condições, então $n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$, visto que $n - n_k \in S$ e $n - n_k - n_1 \notin S$. Como $\overline{F(S) n_k} \in \bar{E}_n$, então $n = F(S) + n_k + s$, com $s \in \bar{S} \setminus \{0\}$. Assim, $F(S) + n_k + s = n_k + w$, ou seja, $F(S) + s = w$. Então $w = F(S) + s \geq F(S) + n_1$ e por outro lado, $w \in Ap(S, n_1) \Rightarrow w \geq F(S) + n_1$, assim $w = F(S) + n_1$. Tem-se que $n = F(S) + n_1 + n_i = F(S) + n_1 + n_k \Rightarrow n_i = n_k$ o que é impossível.

Logo $Ncc(G_n) = Ncc(\bar{G}_n) + 1$.

Além disso, sabemos que G_n tem pelos menos duas componentes conexas, uma delas onde pertence o vértice n_1 e outra onde pertence o vértice n_i , e o grafo $\bar{G}_n$ tem um novo vértice F(S) e duas novas arestas que vão ligar as duas componentes acima referidas:



3) *implica* 1). É imediata. □

Teorema 3.6: Seja S um semigrupo numérico e $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores, com $n_1 < F(S)$, verificando que $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores para $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$. Seja $n \in S$. Então

$$\# RMS + 2 \leq \# RM\bar{S} \leq \# RMS + p + 1.$$

Dem. Temos que

$$\# RMS = \sum_{n \in S \setminus \{0\}} [Ncc(G_n) - 1]$$

e

$$\# RM\bar{S} = \sum_{n \in \bar{S} \setminus \{0\}} [Ncc(\bar{G}_n) - 1].$$

Visto que $\bar{S} \setminus S = \{F(S)\}$ e $\bar{G}_{F(S)}$ é um grafo que contém apenas o vértice F(S), deduzimos que

$$\# RM\bar{S} = \sum_{n \in S \setminus \{0\}} [Ncc(\bar{G}_n) - 1].$$

Seja $A = \{F(S) + n_1, \ldots, F(S) + n_p, 2F(S)\}$ e $B = \{n \in S \mid n = F(S) + n_1 + n_i,$ com $i \in \{2, \ldots, p\}$, e n_1 e n_i em distintas componentes conexas de $G_n\}$.

Então,

$$\# RM\bar{S} = \sum_{n \in A} [Ncc(\bar{G}_n) - 1] + \sum_{n \in B} [Ncc(\bar{G}_n) - 1] + \sum_{n \in S \setminus (A \cup B \cup \{0\})} [Ncc(\bar{G}_n) - 1].$$

Ora, se $n \in A$, tem-se que $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) + 1$, pelo Lema 3.4, e se $n \in B$, tem-se que $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) - 1$, pelo Lema 3.5. Claro que se $n \notin (A \cup B \cup \{0\})$, $\bar{G}_n$ e G_n têm o mesmo número de componentes conexas.

Assim, obtemos

$$\sum_{n\in A}[Ncc(\bar{G}_n) - 1] = \sum_{n\in A}[Ncc(G_n) - 1] + p + 1$$

e

$$\sum_{n\in B}[Ncc(\bar{G}_n) - 1] \geq \sum_{n\in B}[Ncc(G_n) - 1] - (p-1).$$

Então

$$\# RMS + p + 1 - (p-1) \leq \# RM\bar{S} \leq \# RMS + p + 1.$$

Logo

$$\# RMS + 2 \leq \# RM\bar{S} \leq \# RMS + p + 1.$$

□

Estudemos, em seguida, o caso em que $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ não é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$.

Lema 3.7: Seja $S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_p \rangle$, com $n_1 < F(S)$, e $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$, verificando que $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ não é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Seja $n \in S$. Então:

1) $n_p = F(S) + n_1$.

2) $\{n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$.

3) $n \in Ap(\bar{S}, F(S)) \Longrightarrow G_n = \bar{G}_n$.

4) $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n \Longrightarrow$ existe $n_i \in \{n_2, \ldots, n_{p-1}\}$ tal que $n = F(S) + n_i$.

5) $[\, V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n$ e $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)\,] \Longrightarrow n = 2F(S)$.

6) $n \notin Ap(S, n_p) \Longrightarrow Ncc(\bar{G}_n) \leq Ncc(G_n)$

7) $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \Longrightarrow Ncc(G_n) \leq Ncc(\bar{G}_n)$

8) $[Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$ e $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}] \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow n \in \{n_p + n_2, \ldots, n_p + n_{p-1}, 2n_p\}$$

Dem. 1) Se $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ não é um sistema minimal de geradores de $\bar{S}$, então existe $n_j \in \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ tal que $n_j = F(S) + s$, com $s \in \bar{S} \setminus \{0\}$. Portanto

$n_j \geq F(S) + n_1 = Máx\, Ap(S, n_1)$. Dado que $n_p \in Ap(S, n_1)$, tem-se necessariamente que $n_j \geq n_p$, logo $n_j = n_p$ e $n_p = F(S) + n_1$.

2) Por 1) tem-se que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\} = \{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}, F(S) + n_1, F(S)\}$, logo $\{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores de $\bar{S}$.

3) Por hipótese $n \in Ap(\bar{S}, F(S))$, ou seja, $n - F(S) \notin \bar{S}$, portanto $F(S) \notin \bar{V}_n$. Vejamos que $n_p \notin V_n$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que n_p é vértice de G_n. Tem-se que $n - n_p \in S$, então $n = n_p + s = F(S) + n_1 + s$, para algum $s \in S$, e portanto $n \notin Ap(\bar{S}, F(S))$. Assim $n_p \notin V_n$. Concluímos que $V_n \subseteq \bar{V}_n$ e $E_n \subseteq \bar{E}_n$.

Vejamos que $\bar{V}_n = V_n$ e $\bar{E}_n = E_n$.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que se verifica $\bar{V}_n \subset V_n$. Neste caso, existe $n_j \in \{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}\}$ tal que $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$. Tem-se que $n = n + n_j + F(S)$, o que implica que $n - F(S) = n_j \in \bar{S}$. Logo $\bar{V}_n = V_n$.

Suponhamos agora que $\bar{E}_n \subset E_n$. Uma vez que $\bar{V}_n = V_n$, existem $n_i, n_j \in V_n$ tal que $n - (n_i + n_j) \in (\bar{S} \setminus S)$, logo $n = F(S) + n_i + n_j$ e portanto $n - F(S) \in \bar{S}$, o que contradiz a hipótese. Logo $\bar{E}_n = E_n$.

4) Como $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n$, existe $n_i \in \{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}\}$ tal que $n - n_i \in (\bar{S} \setminus S)$ $\Longrightarrow n = F(S) + n_i$. Assim, basta mostrar que $n_i \neq n_1$. De facto, se $n_i = n_1$ tem-se que $n = F(S) + n_1 = n_p$ e $n_p \in V_n$, mas $n_p \notin \bar{V}_n$ é um absurdo. Portanto $n = F(S) + n_i$, com $n_i \in \{n_2, n_2, \dots, n_{p-1}\}$.

5) Se $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n$, tem-se $F(S) \in \bar{V}_n$ e $n_p \notin V_n$, e o grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se a partir de G_n juntando-lhe o vértice $F(S)$ e algumas arestas. Visto que $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$, as novas arestas não podem ser da forma $\overline{F(S)n_i}$. Assim, tem-se que $n - F(S) \in \bar{S} \setminus \{0\}$ e $n - F(S) - n_i \notin \bar{S}$, donde $n = F(S) + s$, com $s \in \bar{S}$ tal que $s - n_i \notin \bar{S}$, para todo o $n_i \in \{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}\}$. Assim, $s = F(S)$, e portanto $n = 2F(S)$.

6) Se $n \notin Ap(S, n_p)$, tem-se que $n_p \in V_n$ e $F(S) \in \bar{V}_n$, portanto $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$.

Se $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n \cup \{n_p\}$, tem-se que $n = F(S) + n_i$ para algum $n_i \in \{n_2, \dots, n_{p-1}\}$. Além disso, $n - n_p = n - (F(S) + n_1) = F(S) + n_i - (F(S) + n_1) \in S$. Tem-se que $n_i - n_1 \in S$, e portanto $n_i = n_1$, donde $n = n_p$. Assim, G_n tem uma única componente conexa cujo único vértice é n_p, e $\bar{G}_n$ também tem apenas uma componente conexa, sendo $\bar{V}_n = \{F(S), n_1\}$ e $\bar{E}_n = \{\overline{n_1 F(S)}\}$. Logo $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) = 1$.

Mostremos que, no caso em que $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$, tem-se $Ncc(\bar{G}_n) \leq Ncc(G_n)$.

Comecemos por observar que $n - (n_p + n_i) = n - (n_1 + F(S) + n_i)$ Assim, se $\overline{n_p n_i} \in E_n$, tem-se $\overline{n_i F(S)} \in \bar{E}_n$. Além disso, $\overline{n_j n_k} \in E_n$ implica que $\overline{n_j n_k} \in \bar{E}_n$. Ou seja, o grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se a partir do grafo G_n, substituindo o vértice n_p por $F(S)$ e acrescentando novas arestas, se for caso disso. Uma vez que não se acrescentam outros vértices, o número de componentes conexa do grafo $\bar{G}_n$ é menor ou igual ao número de componentes conexas do grafo G_n.

7) Se $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \implies n_p \notin V_n$ e $F(S) \in \bar{V}_n$. O grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se a partir do grafo G_n juntando um novo vértice e algumas arestas que podem ser da forma $\overline{n_i n_j}$ ou $\overline{F(S) n_i}$, com $n_i, n_j \in \bar{V}_n$. Ora, $n = F(S) + s$, com $s \in \bar{S} \setminus \{0\}$, logo $n \geq F(S) + n_1$, e portanto $n - n_1 \in \bar{S}$. Tem-se $n_1 \in \bar{V}_n$, e uma vez que $n_1 \neq F(S)$, concluimos que $n_1 \in V_n$. Além disso, $\overline{n_1 F(S)} \notin \bar{E}_n$, uma vez que $n_p \notin V_n$.

Suponhamos que $Ncc(G_n) > Ncc(\bar{G}_n)$. Neste caso, $Ncc(G_n) \geq 2$, e portanto existe um vértice $n_j \in \{n_2, \dots, n_{p-1}\}$ tal que n_1 e n_j estão em componentes conexas diferentes de G_n e , $\overline{n_j F(S)} \notin \bar{E}_n$. Se n_1 e n_j estão em componentes conexas diferentes de G_n, tem-se que $n = n_j + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$. Assim, $n = n_j + w = n_j + F(S) + s$, com $s \in \bar{S}$. Portanto $w = F(S) + s$, o que implica que $s = n_1$. Então $n = n_j + n_p$, o que é impossível, uma vez que $n_p \notin V_n$.

8) Se $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$, tem-se que $n \notin Ap(S, n_p)$, então $\bar{G}_n$ pode ser obtido a partir de G_n mudando o nome do vértice n_p para $F(S)$ e juntando algumas arestas, se for caso disso (ver demonstração de 6)). Além disso, $n_1 \in V_n$, uma vez que $\{F(S)\} \in \bar{V}_n$ (ver demonstração de 7)).

Como, por hipótese, $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$, então $Ncc(G_n) \geq 2$, e portanto existe um vértice $n_j \in \{n_2, \dots, n_{p-1}\}$ tal que n_1 e n_j estão em componentes conexas diferentes de G_n e $\overline{n_j F(S)} \notin \bar{E}_n$.

Consideremos em primeiro lugar que $n_j \neq n_p$. Se n_1 e n_j estão em componentes conexas diferentes de G_n, então $n = n_j + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$. Tem-se que $n = n_j + w = n_j + F(S) + s$, com $s \in \bar{S}$. Portanto $w = F(S) + s$, o que implica que $s = n_1$. Assim, $n = n_j + n_p$, com $n_j \in \{n_2, \dots, n_{p-1}\}$ tal que n_1 e n_j estão em componentes conexas diferentes de G_n.

Suponhamos, agora, que $n_j = n_p$. Isto significa que o único vértice de G_n que não está na componente conexa que contém o vértice n_1 é n_p, então este é o único vértice dessa componente, pelo que $n = kn_p$. Uma vez que $Ncc(G_n) \neq 1$, tem-se que $n \neq n_p$, logo $n = 2n_p$. □

Lema 3.8: Seja $S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_p \rangle$, com $n_1 < F(S)$, e $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$, verificando que $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ não é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Seja $n \in S$. As condições seguintes são equivalentes:

1) $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$.

2) $n \in \{F(S) + n_2, \ldots, F(S) + n_{p-1}, 2F(S)\}$.

3) $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) + 1$.

Dem. 1) *implica* (2). Se $n \notin Ap(S, n_p)$, pelo 6) do Lema 3.7, tem-se que $Ncc(\bar{G}_n) \leq Ncc(G_n)$, donde $n \in Ap(S, n_p)$. Além disso, podemos considerar que $n \notin Ap(\bar{S}, F(S))$, visto que $G_n \neq \bar{G}_n$, pelo 3) do mesmo Lema. Assim, $n - F(S) \in \bar{S}$, logo $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Se $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n$, existe $n_i \in \{n_2, \ldots, n_{p-1}\}$ tal que $n = F(S) + n_i$, pelo 4) do Lema 3.7. Se $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n$, dado que $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$, por hipótese, tem-se $n = 2F(S)$, pelo 5) do mesmo Lema.

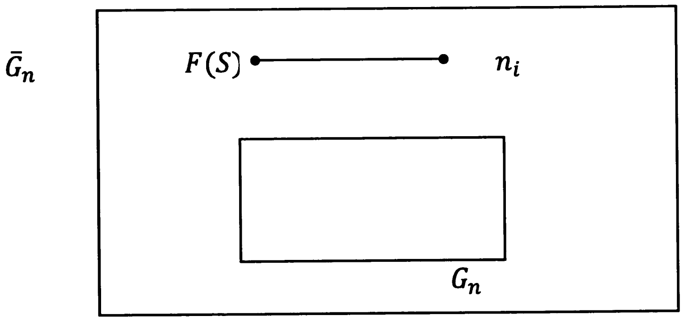
2) *implica* 3). Seja $n \in \{F(S) + n_2, \ldots, F(S) + n_{p-1}, 2F(S)\}$. Vejamos como podemos obter o grafo $\bar{G}_n$ a partir de G_n. Para efectuarmos este estudo consideramos separadamente os casos $n = F(S) + n_i$, com $i \in \{2, \ldots, p-1\}$ e $n = 2F(S)$.

Seja $n = F(S) + n_i$, com $i \in \{2, \ldots, p-1\}$. Observamos em primeiro lugar que $n_1 \notin V_n$ e $n_p \notin V_n$. De facto, $n - n_i = F(S) \notin S$, e se $n_p \in V_n$ tem-se $n = n_p + s = F(S) + n_1 + s$, com $s \in S \backslash \{0\}$, donde $n_i = n_1 + s$ o que é impossível. Então $V_n \cup \{F(S), n_i\} \subseteq \bar{V}_n$. Suponhamos que existe $n_j \in \{n_1, \ldots, n_{p-1}\}$ tal que $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$. Tem-se que $n = n_j + F(S) = F(S) + n_i$, donde $n_j = n_i$. Verifica-se assim a igualdade $V_n \cup \{F(S), n_i\} = \bar{V}_n$.

Analisemos $\bar{E}_n$.

Tem-se que $\overline{F(S)n_i} \in \bar{E}_n$. Mostremos que $\bar{E}_n = E_n \cup \{\overline{F(S)n_i}\}$. Se existir $\overline{n_j n_k} \in (\bar{E}_n \backslash E_n)$ tem-se que $n - (n_j + n_k) = F(S)$, então $F(S) + n_i = F(S) + n_j + n_k$ e portanto $n_i = n_j + n_k$, o que é impossível. Se existir $\overline{F(S)n_k} \in (\bar{E}_n \setminus E_n)$, tem-se que $n - (F(S) + n_k) = F(S)$, logo $F(S) + n_i = F(S) + F(S) + n_k = F(S)$, e portanto $n_i = F(S) + n_k$, o que é impossível.

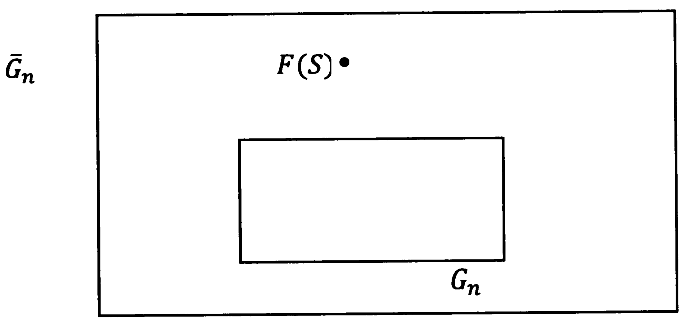
Então



Seja $n = 2F(S)$. Também neste caso $n_p \notin V_n$. Se $n_p \in V_n$, tem-se que $2F(S) = n_p + s = F(S) + n_1 + s$, logo $F(S) = n_1 + s \in S$, o que é impossível. Então $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Suponhamos que existe $n_j \in \{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ tal que $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$. Tem-se que $n = n_j + F(S) = 2\,F(S)$, donde $n_j = F(S)$, o que é impossível. Verifica-se assim a igualdade $V_n \cup \{F(S), n_i\} = \bar{V}_n$.

Mostremos que $\bar{E}_n = E_n$. Se existir $\overline{n_j n_k} \in (\bar{E}_n \setminus E_n)$ tem-se que $n - (n_j + n_k) = F(S)$, donde $2F(S) = F(S) + n_j + n_k$ e portanto $F(S) = n_j + n_k$, o que é impossível. Se existir $\overline{F(S) n_k} \in (\bar{E}_n \setminus E_n)$ tem-se que $n - (F(S) + n_k) = F(S)$, assim $2F(S) = F(S) + F(S) + n_k$, e portanto $n_k = 0$, o que é impossível.

Então



Logo $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) + 1$.

3) *implica* 1). É imediata. □

Lema 3.9: Seja $S = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$, com $n_1 < F(S)$, e $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$, verificando que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ não é um sistema minimal de geradores para $\bar{S}$. Seja $n \in S$. As condições seguintes são equivalentes:

1) $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$.

2) $n \in \{n_p + n_2, \dots, \; n_p + n_{p-1}, \; 2n_p\}$.

3) $Ncc(G_n) = Ncc(\bar{G}_n) + 1$.

Dem. 1) $implica$ 2). Se $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$ tem-se que $G_n \neq \bar{G}_n$, então $n \notin Ap(\bar{S}, F(S))$. Concluímos que $F(S) \in \bar{V}_n$. Além disso, a condição $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$ obriga a que $Ncc(G_n) \geq 2$, pelo que $n \neq n_p$, uma vez que em caso de igualdade o grafo G_n tem apenas o vértice n_p.

Vejamos que $n_p \in V_n$. De facto, se $n_p \notin V_n$ isto significa que $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n$. Se esta inclusão for estrita, existe $n_i \in \{n_2, \dots, n_{p-1}\}$ tal que $n - n_i \in (\bar{S} \setminus S)$, donde $n = F(S) + n_i$. Assim, pelo Lema 3.8 concluímos que $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$, o que contradiz a hipótese. Logo $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n$. Mas, nestas condições, o Lema 3.7 garante que $Ncc(G_n) \leq Ncc(\bar{G}_n)$, o que também não se pode verificar. Logo $n_p \in V_n$.

Mostremos que $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$.

Como $n - n_p \in S$ e $n - F(S) \in \bar{S}$, então $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Se $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n \cup \{n_p\}$, tem-se que $n - n_i \in (\bar{S} \setminus S)$, para algum $n_i \in \{n_1, \dots, n_{p-1}\}$, donde $n = F(S) + n_i$. Pelo Lema 3.8 concluímos que $Ncc(G_n) < Ncc(\bar{G}_n)$, o que contradiz a hipótese.

Assim, $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$ e $Ncc(\bar{G}_n) < Ncc(G_n)$, por hipótese, logo $n \in \{n_p + n_2, \dots, n_p + n_{p-1}, 2n_p\}$.

2) $implica$ 3). Vamos estudar separadamente os casos $n = 2n_p$ e $n \in \{n_p + n_2, \dots, n_p + n_{p-1}\}$.

Se $n = n_p + n_i$, para algum $i \in \{2, \dots, p-1\}$, o grafo G_n tem uma componente conexa constituída pelos vértices n_p e n_i e pela aresta $\overline{n_p n_i}$. Mostremos que não existe outro vértice nesta componente conexa:

Se $n_p + n_i - (n_p + n_j) \in S$, então $n_p + n_i = n_p + n_j + s$, portanto $n_i = n_j$.

Se $n_p + n_i - (n_i + n_j) \in S$, então $n_p + n_i = n_i + n_j + s$, logo $n_p = n_j$.

Vejamos em seguida que $n_1 \in V_n$.

De facto, $n - n_1 = n_p + n_i - n_1 = F(S) + n_1 + n_i - n_1 = F(S) + n_i \in S$. Assim, n_1 é um vértice de G_n e pertence a uma componente conexa distinta da componente cujos vértices são n_p e n_i.

Mostremos que $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$

Tem-se que $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$, uma vez que $n_p \in G_n$ e $F(S) \in \bar{G}_n$. Suponhamos que se verifica $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Então, existe n_j, com $j \in \{2, \dots, p-1\}$, tal que $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$, donde $n = n_p + n_i = F(S) + n_j$. Portanto, $F(S) + n_1 + n_i = F(S) + n_j$, logo $n_1 + n_i = n_j$, o que é impossível visto que n_1, n_i e n_j pertencem a um sistema minimal de geradores de S.

Analisemos agora as componentes conexas dos grafos G_n e $\bar{G}_n$.

Designemos por $V_n^1, V_n^2, \dots, V_n^r$ os conjuntos dos vértices das r componentes conexas de G_n, com $V_n^1 = \{n_i, n_p\}$ e $n_1 \in V_n^2$. Já vimos que n_1 e n_i pertencem a componentes conexas distintas de G_n, no entanto os vértices n_1, n_i e $F(S)$ pertencem à mesma componente conexa do grafo $\bar{G}_n$, uma vez que $n = n_p + n_i = F(S) + n_1 + n_i$. Designemos esta componente por $\bar{V}_n^1$.

Mostremos que os conjuntos dos vértices das componentes conexas de $\bar{G}_n$ são:

$$\bar{V}_n^1 = (V_n^1 \backslash \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\},$$

$$\bar{V}_n^2 = V_n^3, \dots, \bar{V}_n^{r-1} = V_n^r .$$

Por construção de $\bar{V}_n^1$, obtém-se que $\bar{V}_n^1 \subseteq (V_n^1 \backslash \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$. Mostremos que esta inclusão não é estrita. Suponhamos que existe outro vértice n_k nesta componente conexa, então $n_k \notin (V_n^1 \backslash \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$ e $n_j \in (V_n^1 \backslash \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$ tal que $\overline{n_k n_j} \in \bar{E}_n$.

Suponhamos que $n_j \neq F(S)$. Então $n - (n_k + n_j) \in (\bar{S} \setminus S)$, ou seja, $n = F(S) + n_k + n_j$. Mas $n_k \notin V_n^2$, donde $n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$. Assim, $F(S) + n_k + n_j = n_k + w$, portanto $F(S) + n_j = w$, então $n_j = n_1$ e $n_i = n_k$, o que é absurdo visto que $n_i \in V_n^1$.

Suponhamos que $n_j = F(S)$. Então $n - (n_k + F(S)) \in \bar{S}$, ou seja, $n = n_k + F(S) + s$, com $s \in \bar{S}$. Mas $n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$, portanto $n_k + F(S) + s = n_k + w$, então $F(S) + s = w$. Como $F(S) + s \geq F(S) + n_1$ e $F(S) + s = w \in Ap(S, n_1)$, tem-se que $s = n_1$, donde $w = n_p$. Tem-se que $n = n_p + n_i = n_k + n_p$, e portanto $n_i = n_k$, o que é absurdo.

Provemos que $\bar{V}_n^2 = V_n^3, \dots, \bar{V}_n^{r-1} = V_n^r$.

Basta mostrar que se $n_k \in V_n^p$ e $n_j \in V_n^t$, com $p \neq t$ e $p, t \in \{3, \dots, r\}$, então $n - (n_k + n_j) \notin \bar{S}$.

Suponhamos que $n_k \in V_n^p$ e $n_j \in V_n^t$, com $p \neq t$ e $p, t \in \{3, \dots, r\}$, e $n - (n_k + n_j) \in \bar{S}$. Dado que $n - (n_k + n_j) \notin S$, uma vez que n_k e n_j pertencem a componentes conexas distintas de G_n, tem-se que $n = n_k + n_j + F(S)$. Além disso, $n_k \notin \bar{V}_n^1$, donde $n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$. Assim, $w = n_j + F(S)$, logo $n_j = n_1$, o que é absurdo.

Se $n = 2n_p$, a situação é análoga.

Mostremos que o grafo G_n tem uma componente conexa, apenas, e que n_p é o único vértice dessa componente. Suponhamos que $n - (n_p + n_k) \in S$. Então $2n_p = n_p + n_k + s$, com $s \in S$, donde $n_p = n_k + s$, e portanto $s = 0$ e $n_p = n_k$, uma vez que n_p e n_k pertencem a um sistema minimal de geradores de S.

Vejamos que $n_1 \in V_n$. De facto, $n - n_1 = 2 - n_1 = 2n_1 + 2F(S) - n_1 = n_1 + 2F(S) \in S$.

Mostremos que $V_n \cup \{F(S)\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$

Tem-se $V_n \cup \{F(S)\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$, uma vez que $n_p \in G_n$ e $F(S) \in \bar{G}_n$. Suponhamos que se verifica $V_n \cup \{F(S)\} \subset \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Então, existe n_j, com $j \in \{2, \dots, p-1\}$ tal que $n - n_j \in (\bar{S} \setminus S)$, donde $n = F(S) + n_j$. Portanto, $2n_p = F(S) + n_1 + n_p = F(S) + n_j$, e portanto $n_1 + n_p = n_j$, o que é impossível visto que n_1, n_p e n_j pertencem a um sistema minimal de geradores de S.

Analisemos agora as componentes conexas dos grafos G_n e $\bar{G}_n$.

Designemos novamente os conjuntos dos vértices das r componentes conexas de G_n por $V_n^1, V_n^2, \dots, V_n^r$, com $V_n^1 = \{n_p\}$ e $n_1 \in V_n^2$. Já vimos que n_1 e n_i estão em componentes conexas distintas de G_n, no entanto os vértices n_1 e $F(S)$ pertencem à mesma componente conexa do grafo $\bar{G}_n$, uma vez que $n = 2n_p = 2F(S) + 2n_1$. Designemos esta componente por $\bar{V}_n^1$.

Mostremos que os conjuntos dos vértices das componentes conexas de $\bar{G}_n$ são:

$$\bar{V}_n^1 = (V_n^1 \setminus \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\},$$

$$\bar{V}_n^2 = V_n^3, \dots, \bar{V}_n^{r-1} = V_n^r.$$

Por construção de $\bar{V}_n^1$, obtém-se que $\bar{V}_n^1 \subseteq (V_n^1 \setminus \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$. Mostremos que esta inclusão não é estrita. Suponhamos que existe outro vértice n_k nesta componente conexa. Tem-se que $n_k \notin (V_n^1 \setminus \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$ e $n_j \in (V_n^1 \setminus \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$ tal que $\overline{n_k n_j} \in \bar{E}_n$. Suponhamos que $n_j \neq F(S)$. Então $n - (n_k + n_j) \in (\bar{S} \setminus S)$, ou seja, $n = F(S) + n_k + n_j$. Mas $n_k \notin V_n^2$, então $n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$. Assim, $F(S) + n_k + n_j = n_k + w$, donde $F(S) + n_j = w$, e portanto $n_j = n_1$, logo $w = n_p$. Tem-se que $n = 2n_p = n_k + n_p$, e portanto $n_p = n_k$, o que é absurdo visto que $n_p \in V_n^1$. Suponhamos que $n_j = F(S)$. Então $n - (n_k + F(S)) \in \bar{S}$, ou seja, $n = n_k + F(S) + s$, com $s \in \bar{S}$. Ora, $n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$, assim $n_k + F(S) + s = n_k + w$, e portanto $F(S) + s = w$. Como $F(S) + s \geq F(S) + n_1$ e $F(S) + s = w \in Ap(S, n_1)$, tem-se que $s = n_1$, donde $w = n_p$. Tem-se, assim, que $n = 2n_p = n_k + n_p$, resultando que $n_p = n_k$, o que é absurdo. Logo $\bar{V}_n^1 = (V_n^1 \setminus \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{F(S)\}$.

Provemos agora que $\bar{V}_n^2 = V_n^3, \dots, \bar{V}_n^{r-1} = V_n^r$. Basta mostrar que se $n_k \in V_n^p$ e $n_j \in V_n^t$, com $p \neq t$ e $p, t \in \{3, \dots, r\}$, então $n - (n_k + n_j) \notin \bar{S}$. Suponhamos que $n_k \in V_n^p$ e $n_j \in V_n^t$, com $p \neq t$ e $p, t \in \{3, \dots, r\}$, e $n - (n_k + n_j) \in \bar{S}$. Dado que $n - (n_k + n_j) \notin S$, visto que n_k e n_j estão em componentes conexas distintas de G_n, tem-se que $n = n_k + n_j + F(S)$. Além disso, visto que $n_k \notin \bar{V}_n^1$, obtemos que

$n = n_k + w$, com $w \in Ap(S, n_1)$. Assim, $w = n_j + F(S)$, logo $n_j = n_1$, o que é absurdo.

Assim, o grafo $\bar{G}_n$ pode obter-se de G_n juntando duas componentes numa só e mantendo as restantes. Logo, $Ncc(G_n) = Ncc(\bar{G}_n) + 1$.

3) *implica* 1). É imediata.□

Teorema 3.10: Seja S um semigrupo numérico e $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores, com $n_1 < F(S)$, verificando que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ não é um sistema minimal de geradores para $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$. Seja $n \in S$. Então

$$\# RM\bar{S} = \# RMS.$$

Dem. Tem-se que

$$\# RMS = \sum_{n \in S \setminus \{0\}} [Ncc(G_n) - 1]$$

e

$$\# RM\bar{S} = \sum_{n \in \bar{S} \setminus \{0\}} [Ncc(\bar{G}_n) - 1].$$

Além disso, $\bar{S} \setminus S = \{F(S)\}$ e $\bar{G}_{F(S)}$ é um grafo que contém apenas o vértice F(S), logo

$$\# RM\bar{S} = \sum_{n \in S \setminus \{0\}} [Ncc(\bar{G}_n) - 1].$$

Seja $A = \{F(S) + n_2, \dots, F(S) + n_{p-1}, 2F(S)\}$ e $B = \{n_p + n_2, \dots, n_p + n_{p-1}, 2n_p\}$. Então,

$$\# RM\bar{S} = \sum_{n \in A} [Ncc(\bar{G}_n) - 1] + \sum_{n \in B} [Ncc(\bar{G}_n) - 1] + \sum_{n \in S \setminus (A \cup B \cup \{0\})} [Ncc(\bar{G}_n) - 1].$$

Mas, se $n \in A$, tem-se $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) + 1$, pelo Lema 3.8, e se $n \in B$, tem-se $Ncc(\bar{G}_n) = Ncc(G_n) - 1$, pelo Lema 3.9. É claro que se $n \notin (A \cup B \cup \{0\})$, $\bar{G}_n$ e G_n têm o mesmo número de componentes conexas.

Então

$$\sum_{n \in A} [Ncc(\bar{G}_n) - 1] = \sum_{n \in A} [Ncc(G_n) - 1] + p - 1$$

e

$$\sum_{n \in B} [Ncc(\bar{G}_n) - 1] \geq \sum_{n \in B} [Ncc(G_n) - 1] - (p - 1).$$

Logo $\# RMS = \# RM\bar{S}$. □

Proposição 3.11: Consideremos a seguinte sucessão de semigrupos numéricos

$$S_1 = S \text{ e } S_{i+1} = S_i \cup \{F(S_i)\}.$$

Então

1) Existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $S_e = \langle n_1, n_1 + 1, \dots, 2n_1 - 1 \rangle$.

2) $\# RMS_i + 2 \leq \# RMS_{i+1}$ se e só se $F(S_i) + n_1 \in Ap(S, n_1) \backslash \{0, n_2, \dots, n_p\}$.

Dem. 1) É trivial.

2) $\mathit{Condição\ necessária}$. Se $\# RMS_i \neq \# RMS_{i+1}$, aplicando o Teorema 3.10, obtemos que $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S_i)\}$ é um sistema minimal de geradores para S_{i+1}, donde $F(S_i) + n_1 \neq n_p$. Assim, $F(S_i) + n_1$ não é gerador minimal de S_i , e portanto concluímos que $F(S_i) + n_1 \in Ap(S, n_1) \backslash \{0, n_2, \dots, n_p\}$.

$\mathit{Condição\ suficiente}$. Se $F(S_i) + n_1 \in Ap(S, n_1) \backslash \{0, n_2, \dots, n_p\}$, temos que $F(S_i) + n_1$ não é gerador minimal de S_i. Então $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S_i)\}$ é um sistema minimal de geradores para S_{i+1}. Então, aplicando o Teorema 3.6, concluímos que $\# RMS_i + 2 \leq \# RMS_{i+1}$. □

Teorema 3.12: Seja S um semigrupo numérico e seja $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores. Então o cardinal de uma apresentação minimal para S é menor ou igual a

$$\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} - 2(n_1 - p).$$

Dem. Consideremos a sucessão

$S_1 = S$ e $S_{i+1} = S_i \cup \{F(S_i)\}$, com $i \in \{1, 2, \dots\}$. Pela Proposição 3.11, existe e tal que $S_e = \langle n_1, n_1 + 1, \dots, 2n_1 - 1 \rangle$. Pelos Teoremas 3.6 e 3.10, podemos afirmar que em cada etapa desta sequência $\# RMS_i = \# RMS_{i+1}$ ou $\# RMS_i \leq \# RMS_{i+1} - 2$. Além disso, sabemos que os aumentos, quando existem, correspondem aos elementos de $Ap(S, n_1) \backslash \{0\}$ que não são geradores minimais de S, que são exactamente $n_1 - p$ elementos.

Então

$$\# \, RMS + 2(n_1 - p) \leq \# \, RMS_e = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2}.$$

Logo

$$\# \, RMS \leq \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} - 2(n_1 - p).$$

□

Exemplo 3.13: Consideremos o semigrupo numérico $S = \langle 5, 8, 14 \rangle$. A sequência acima referida é

$$S_1 = S,$$

$$S_2 = S_1 \cup \{17\} = \langle 5, 8, 14, 17 \rangle,$$

$$S_3 = S_2 \cup \{12\} = \langle 5, 8, 12, 14, 17 \rangle = \langle 5, 8, 12, 14 \rangle,$$

$$S_4 = S_3 \cup \{11\} = \langle 5, 8, 11, 12, 14 \rangle,$$

$$S_5 = S_4 \cup \{9\} = \langle 5, 8, 9, 11, 12 \rangle,$$

$$S_6 = S_5 \cup \{7\} = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle,$$

$$S_7 = S_6 \cup \{6\} = \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle.$$

Observamos que os semigrupos numéricos S_4, S_5, S_6 e S_7 têm todos máxima dimensão de imersão, pelo que uma relação mínima para qualquer um destes semigrupos numéricos tem dez elementos, ou seja, $\# \, RMS_i = \frac{5(5-1)}{2} = 10$. Além disso, pelo Teorema 3.2, podemos concluir que o cardinal de uma relação mínima para $S = S_1$ é menor ou igual a $10 - 2(5 - 3) = 6$.

De facto, uma relação minimal para S_1 é

$$2 \times 5 + 14 = 3 \times 8,$$

$$2 \times 14 = 4 \times 5 + 8,$$

$$6 \times 5 = 2 \times 8 + 14.$$

E, assim $\# \, RMS_1 = 3$.

Por outro lado, a partir de uma apresentação para S_1 podemos encontrar uma apresentação para cada um dos outros semigrupos da sequência, uma vez que sabemos, em cada passo, quais as relações a juntar e quais a suprimir.

Na primeira etapa desta sequência, tem-se que $\{5,8,14\} \cup \{17\}$ é um sistema minimal de geradores de $S_1 \cup \{17\}$, donde ao passar de S_1 para S_2 ganham-se quatro relações e podem perder-se duas relações. As relações que se ganham são

$$17 + 5 = 8 + 14,$$

$$17 + 8 = 5 \times 5,$$

$$17 + 14 = 3 \times 5 + 2 \times 8,$$

$$17 + 17 = 4 \times 5 + 14 = 3 \times 8 + 2 \times 5.$$

E as que se podem perder correspondem a $n \in \{22 + 8, 22 + 14\}$.

Verificamos que se perde $22 + 8 = 17 + 5 + 8 = 6 \times 5 = 2 \times 8 + 14$.

Neste caso perde-se uma relação e ganham-se quatro, donde $\# \mathrm{RMS}_2 = 6$. Uma relação minimal para S_2 é

$$17 + 5 = 8 + 14,$$

$$2 \times 5 + 14 = 3 \times 8,$$

$$17 + 8 = 5 \times 5,$$

$$2 \times 14 = 4 \times 5 + 8,$$

$$17 + 14 = 3 \times 5 + 2 \times 8,$$

$$17 + 17 = 4 \times 5 + 14 = 3 \times 8 + 2 \times 5.$$

Quando passamos de S_2 para S_3, ganham-se tantas relações quantas as que se perdem, dado que $\{5,8,14,17\} \cup \{12\}$ não é um sistema minimal de geradores de $S_3 = S_2 \cup \{12\}$. De facto, ganham-se

$$12 + 8 = 4 \times 5,$$

$$12 + 14 = 2 \times 8 + 2 \times 5,$$

$$2 \times 12 = 3 \times 8 = 2 \times 5 + 14.$$

E perdem-se

$$17 + 8 = 5 \times 5 = 5 + 12 + 8,$$

$$17 + 14 = 5 + 12 + 14 = 3 \times 5 + 2 \times 8,$$

$$2 \times 17 = 2 \times 5 + 2 \times 12 = 4 \times 5 + 14 = 3 \times 8 + 2 \times 5.$$

Uma relação minimal para S_3 é

$$4 \times 5 = 8 + 12,$$

$$2 \times 5 + 12 = 8 + 14,$$

$$2 \times 5 + 14 = 3 \times 8 = 2 \times 12,$$

$$2 \times 5 + 2 \times 8 = 12 + 14,$$

$$2 \times 8 + 12 = 2 \times 14.$$

Quando passamos de S_3 para S_4, o número de relações aumenta, atingindo o valor máximo para semigrupos com esta multiplicidade.

As relações que se ganham são

$$11 + 5 = 2 \times 8,$$

$$11 + 8 = 5 + 14,$$

$$11 + 12 = 3 \times 5 + 8,$$

$$11 + 14 = 5 + 8 + 12 = 5 \times 5,$$

$$2 \times 11 = 14 + 8.$$

E as que se perdem são

$$16 + 8 = 11 + 5 + 8 = 2 \times 17 = 2 \times 5 + 2 \times 12 = 4 \times 5 + 14 = 3 \times 8 + 2 \times 5,$$

$$16 + 12 = 11 + 5 + 12 = 2 \times 14 = 4 \times 5 + 8.$$

Uma relação minimal para $S_4 = \langle 5, 8, 11, 12, 14 \rangle$ é

$$5 + 11 = 2 \times 8,$$

$$11 + 8 = 5 + 14,$$

$$12 + 8 = 4 \times 5,$$

$$2 \times 11 = 14 + 8 = 2 \times 5 + 12$$

$$11 + 12 = 3 \times 5 + 8,$$

$$2 \times 12 = 3 \times 8 = 8 + 5 + 11 = 2 \times 5 + 14,$$

$$11 + 14 = 5 + 8 + 12 = 5 \times 5,$$

$$12 + 14 = 2 \times 8 + 2 \times 5,$$

$$2 \times 14 = 2 \times 8 + 12.$$

Confirma-se, assim, que $\# \, \mathrm{RMS}_4 = 10$.

Capítulo 4

Semigrupos numéricos irredutíveis

Neste capítulo, iniciamos o estudo dos semigrupos numéricos irredutíveis. Começamos por mostrar que os semigrupos numéricos irredutíveis são os semigrupos numéricos maximais, relativamente à inclusão, no conjunto dos semigrupos numéricos com um dado número de Frobenius, e mostramos que dado um semigrupo numérico qualquer existe sempre um semigrupo numérico irredutível que o contém. Em seguida, caracterizamos os semigrupos numéricos irredutíveis em função da paridade do seu número de Frobenius (simétricos e pseudo-simétricos) e em função dos seus conjuntos de Apéry. Observamos que os únicos semigrupos numéricos irredutíveis com máxima dimensão de imersão são os semigrupos numéricos simétricos com multiplicidade 2 e os pseudo-simétricos com multiplicidade 3. A finalizar, estudamos os semigrupos numéricos irredutíveis com multiplicidade 3 e 4, determinando uma apresentação minimal para estes semigrupos numéricos.

4.1. Semigrupos numéricos simétricos e pseudo-simétricos

Um semigrupo numérico diz-se **irredutível** se não pode ser escrito como intersecção de dois semigrupos numéricos que o contenham propriamente. O resultado seguinte caracteriza os semigrupos numéricos irredutíveis como semigrupos maximais, relativamente à inclusão, no conjunto dos semigrupos numéricos com um dado número de Frobenius.

Teorema 4.1: Seja $S = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$. As condições seguintes são equivalentes:

1) S é irredutível.

2) S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius.

3) S é maximal no conjunto de todos os semigrupos que não contêm $F(S)$.

Dem. $1)$ *implica* $2)$. Seja T um semigrupo numérico tal que $F(T) = F(S)$ e $S \subseteq T$. Então $S = (S \cup \{F(S)\}) \cap T$. Dado que S é irredutível, por hipótese, concluímos que $S = T$.

$2)$ *implica* $3)$. Seja T um semigrupo numérico tal que $F(S) \notin T$ e $S \subseteq T$. Então $T = T \cup \{F(S)+1,\ F(S)+2,\ \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius igual a F(S) e que contém S. Como por hipótese S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius, concluímos que $T \subseteq S$. Logo, $S = T$.

$3)$ *implica* $1)$. Sejam S_1 e S_2 dois semigrupos numéricos e suponhamos que $S \subset S_1$ e $S \subset S_2$. Como S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não contêm F(S), então $F(S) \in S_1$ e $F(S) \in S_2$, portanto $F(S) \in S_1 \cap S_2$, assim $S \neq S_1 \cap S_2$, donde S é irredutível.□

O resultado anterior, além de dar uma caracterização alternativa para os semigrupos numéricos irredutíveis, como já referimos, garante que, dado um semigrupo numérico S qualquer existe um semigrupo numérico irredutível com o mesmo número de Frobenius que contém S. A construção deste semigrupo numérico irredutível é possível utilizando o lema seguinte.

Lema 4.2: Seja S um semigrupo numérico. Suponhamos que existe

$$h = máx\left\{x \in \mathbb{Z}\backslash S \mid F(S) - x \notin S \text{ e } x \neq \frac{F(S)}{2}\right\}.$$

Então $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico e $F(S \cup \{h\}) = F(S)$.

Dem. O complementar de $S \cup \{h\}$ em IN é finito e $0 \in S \cup \{h\}$. Provemos que $a + b \in S \cup \{h\}$, quaisquer que sejam $a, b \in S \cup \{h\}$. Basta mostrar que $a + h \in S$, para todo o $a \in S\backslash\{0\}$, e que $2h \in S$. Seja $H = \left\{x \in \mathbb{Z}\backslash S \mid F(S) - x \notin S \text{ e } x \neq \frac{F(S)}{2}\right\}$. Comecemos por observar que $h > \frac{F(S)}{2}$. De facto, se $x \in H$, então $F(S) - x \in H$, donde $h > \frac{F(S)}{2}$. Seja $a \in S\backslash\{0\}$. Suponhamos que $a + h \notin S$. Dado que $a + h > h$, tem-se que $F(S) - (a + h) \in S$ ou $a + h = \frac{F(S)}{2}$. Mas a segunda hipótese não é verdadeira, visto que $h > \frac{F(S)}{2}$, portanto $F(S) - (a + h) = t \in S$. Então $F(S) - h = a + t \in S$, o que contradiz a definição de h. Logo $a + h \in S$. Suponhamos, agora, que $2h \notin S$. Analogamente ao caso anterior, concluímos que $F(S) - 2h = t \in S$. Temos que $F(S) - h = h + t$, com $t \in S$, e portanto $F(S) - h \in S$, o que contradiz a definição de h. Concluímos que $2h \in S$. Assim, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico.

Por último, observemos que $F(S) \notin S \cup \{h\}$, o que implica que $F(S) > h$ e $F(S \cup \{h\}) = F(S)$. De facto, $F(S) \in (\mathbb{Z} \backslash S)$ mas $F(S) - F(S) = 0 \in S$. Então

$$F(S) \notin \left\{x \in \mathbb{Z} \backslash S \mid F(S) - x \notin S \; e \; x \neq \frac{F(S)}{2}\right\}.$$

Assim, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico e $F(S \cup \{h\}) = F(S)$. □

Observamos que se S é um semigrupo numérico tal que $F(S)$ é ímpar basta considerar $h = máx\{x \in \mathbb{Z} \backslash S \mid F(S) - x \notin S\}$.

No conjunto dos semigrupos numéricos irredutíveis podemos distinguir duas classes de semigrupos numéricos, atendendo à paridade do seu número de Frobenius. Um semigrupo numérico irredutível com número de Frobenius ímpar diz-se **simétrico**. Se o número de Frobenius for par, o semigrupo numérico diz-se **pseudo-simétrico**.

A proposição seguinte, que é considerada frequentemente como definição, dá-nos uma caracterização alternativa para estes semigrupos numéricos.

Proposição 4.3: Seja S um semigrupo numérico. Então

1) S é simétrico se e só se $F(S)$ é ímpar e $x \notin S \Longrightarrow F(S) - x \in S$.

2) S é pseudosimétrico se e só se $F(S)$ é par e $x \notin S \Longrightarrow F(S) - x \in S$ ou $x = \frac{F(S)}{2}$.

Dem.1) *Condição necessária*. Suponhamos que existe $x \notin S$ tal que $F(S) - x \notin S$. Dado que $F(S)$ é ímpar, tem-se que $x \neq \frac{F(S)}{2}$. Então existe um inteiro $h \notin S$ tal que $F(S) - x \leq h$ e $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico, pelo Lema 4.2. Mas este semigrupo numérico tem número de Frobenius F(S) e contém S propriamente, o que contradiz a hipótese de S ser maximal no conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius $F(S)$. Logo $F(S) - x \in S$.

1) *Condição suficiente*. Uma vez que $F(S)$ é ímpar, basta provar que S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$. Suponhamos que existe um semigrupo numérico T que não contém F(S) tal que $S \subsetneq T$. Seja $x \in (T \backslash S)$. Por hipótese, $F(S) - x \in S$, logo $F(S) - x \in T$, ou seja $F(S) = x + t$, com $t \in T$, donde $F(S) \in T$, o que contradiz a hipótese. Logo S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$.

2) *Condição necessária*. Suponhamos que existe $x \notin S$ tal que $F(S) - x \notin S$ e $x \neq \frac{F(S)}{2}$. O Lema 4.2 garante a existência de um inteiro $h \notin S$ tal que $F(S) - x \leq$

h com $S \cup \{h\}$ um semigrupo numérico. Mas este semigrupo numérico tem número de Frobenius F(S) e contém S propriamente, o que contradiz a hipótese de S ser maximal no conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius $F(S)$. Então $F(S) - x \in S$.

2) *Condição suficiente*. Uma vez que $F(S)$ é par, basta provar que S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$. Suponhamos que existe um semigrupo numérico T que não contém F(S) tal que $S \subsetneq T$. Seja $x \in (T \backslash S)$. Por hipótese, $F(S) - x \in S$, assim $F(S) - x \in T$, ou seja, $F(S) = x + t, \text{com } t \in T$, donde $F(S) \in T$, o que contradiz a hipótese. Logo, S é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$. □

A partir da proposição anterior podemos ainda caracterizar os semigrupos numéricos irredutíveis em função do seu género.

Corolário 4.4: Seja S um semigrupo numérico.

1) S é simétrico se e só se $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$.

2) S é pseudosimétrico se e só se $g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$.

Dem. 1) Dado um semigrupo numérico simétrico S, temos $F(S) + 1$ inteiros menores ou iguais a $F(S)$. Só metade destes inteiros pertencem a S, uma vez que a cada inteiro x que não pertence a S corresponde outro, $F(S) - x$, que pertence a S.

2) Temos $F(S) + 1$ inteiros menores ou iguais a $F(S)$. Um destes inteiros é $F(S)/2$ que não pertence a S. Os restantes podem agrupar-se em pares da forma x e $F(S) - x$. Em cada um destes $\frac{F(S)}{2}$ pares, um dos números pertence a S e o outro não pertence a S. Donde, $g(S) = \frac{F(S)}{2} + 1 = \frac{F(S)+2}{2}$. □

Observamos que, dentro da classe dos semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius, os semigrupos numéricos simétricos são os que têm o menor género possível, uma vez que os semigrupos dessa classe verificam a condição $g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}$, como foi referido na Proposição 1.18, e os semigrupos simétricos verificam a igualdade. Outro resultado importante que se obtém do corolário anterior é que qualquer semigrupo com dois geradores minimais é simétrico, uma vez que verifica a igualdade $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ (Proposição 1.17).

Corolário 4.5: Todos os semigrupos numéricos com dimensão de imersão dois são simétricos.

Os conjuntos Apéry de semigrupos numéricos irredutíveis têm características particulares, como veremos em seguida.

Lema 4.6: Seja S um semigrupo numérico tal que $x, y \in S$ e $n \in S\backslash\{0\}$. Se $x + y \in Ap(S, n)$, então $\{x, y\} \subseteq Ap(S, n)$.

Dem. Sejam $x, y \in S$, e $n \in S\backslash\{0\}$, tais que $x + y \in Ap(S, n)$. Se $x \notin Ap(S, n)$ isso significa que $x - n \in S$. Então $x + y - n = (x - n) + y \in S$, contrariando o facto de que $x + y \in Ap(S, n)$. □

Proposição 4.7: Seja S um semigrupo numérico e $n \in S\backslash\{0\}$. Consideremos $Ap(S, n) = \{w_0 < w_1 < \cdots < w_{n-1} = F(S) + n\}$. Então

S é simétrico se e só se $w_i + w_{n-1-i} = w_{n-1}$, para todo o $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Dem. *Condição necessária*. De facto, pela Proposição 1.16, sabemos que $w_{n-1} - n = F(S)$. Como $w_i - n \notin S$ e S é simétrico, então $F(S) - (w_i - n) = w_{n-1} - w_i \in S$ (Proposição 4.3). Assim, existe $s \in S$ tal que $w_{n-1} - w_i = s$, ou seja, $w_{n-1} = w_i + s$. Pelo Lema 4.6, concluímos que existe $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $s = w_j$ e, dado que $w_0 < w_1 < \cdots < w_{n-1}$, obtemos que $j = n - 1 - i$.

Condição suficiente. Da hipótese concluímos que $\{w_{n-1}\} = Maximais_{\leq_S}$ $Ap(S, n)$. Pela Proposição 1.21, temos que $PF(S) = \{F(S)\}$. Assim, $\{F(S)\} = Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z}\backslash S)$. Então dado $x \in \mathbb{Z}\backslash S$, tem-se $F(S) - x \in S$. Além disso, $F(S)$ é ímpar, caso contrário, $\frac{F(S)}{2} \in \mathbb{Z}\backslash S$ e, pelo que acabámos de mostrar, $F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \in S$, o que é uma contradição. □

Da proposição anterior, e da sua demonstração, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.8: Seja $S = \langle n_1, n_2, \dots, n_p \rangle$. As condições seguintes são equivalentes:

1) S é simétrico.

2) $PF(S) = \{F(S)\}$.

3) $t(S) = 1$.

Atendendo à relação existente entre o conjunto dos pseudo-números de Frobenius de S e os elementos maximais dos conjuntos Apéry de S , podemos dar outro enunciado a este corolário.

Corolário 4.9: Seja S um semigrupo numérico e $n \in S\backslash\{0\}$. S é simétrico se e só se $Maximais \leq_S Ap(S,n) = \{F(S)+n\}$.

Mostra-se facilmente que o semigrupo numérico $S = \langle m, m+1, \dots, m+m-2 \rangle$ é um semigrupo numérico simétrico com número de Frobenius $2m-1$. De facto, $S = \{0, m, m+1, \dots, m+m-2, 2m, 2m+1, \rightarrow\}$, donde $F(S) = 2m-1$ e $Ap(S;m) = \{0,\ m+1, m+2, \dots, m+m-2,\ 3m-1\}$. Tem-se, assim, $Maximais \leq_S Ap(S,m) = \{3m-1\}$, o que permite concluir o pretendido.

Em seguida, vamos caracterizar os semigrupos numéricos pseudosimétricos, dando especial atenção ao elemento $\frac{F(S)}{2}$.

Lema 4.10: Seja S um semigrupo numérico e $n \in S\backslash\{0\}$. Se S é pseudosimétrico então $\frac{F(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$.

Dem. Dado que $\frac{F(S)}{2} \notin S$, basta provar que $\frac{F(S)}{2} + n \in S$. Se assim não for, temos que $F(S) - \left(\frac{F(S)}{2} + n\right) = \frac{F(S)}{2} - n \in S$, o que é absurdo, uma vez que isto implica que $\frac{F(S)}{2} - n + n = \frac{F(S)}{2} \in S$. □

Proposição 4.11 Seja S um semigrupo numérico com número de Frobenius par e seja $n \in S\backslash\{0\}$. Então S é pseudo-simétrico se e só se

$$Ap(S,n) = \{w_0 < w_1 < \cdots < w_{n-2} = F(S)+n\} \cup \left\{\frac{F(S)}{2} + n\right\}$$

e $w_i + w_{n-2-i} = w_{n-2}$ para todo o $i \in \{0,\ 1, \dots, n-2\}$.

Dem. *Condição necessária.* Pelo Lema 4.10, temos que $\frac{F(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$. Então $\frac{F(S)}{2} + n < máx\, Ap(S,n) = F(S)+n$, pela Proposição 1.16. Seja $w_i \in Ap(S,n)\backslash\left\{\frac{F(S)}{2} + n\right\}$. Como S é pseudo-simétrico e $w_i - n \notin S$ e $w_i - n \neq \frac{F(S)}{2}$, então $F(S) - (w_i - n) = F(S) + n - w_i \in S$, pela Proposição 4.3. Mas $(F(S) + n - w_i) + w_i \in Ap(S,n)$ e $w_i \in Ap(S,n)$, assim $F(S) + n - w_i \in Ap(S,n)$, pelo Lema 4.6. Além disso, tem-se que $F(S) + n - w_i \neq \frac{F(S)}{2} + n$, caso contrário verifica-se que

$w_i = \frac{F(S)}{2}$. Donde, para cada $i \in \{0,1,\dots,n-2\}$, existe $j \in \{0,1,\dots,n-2\}$ tal que $w_i + w_j = F(S) + n$.

$Condição\ suficiente.$ Seja $x \notin S$ e $x \neq \frac{F(S)}{2}$. Provemos que $F(S) - x \in S$. Consideremos $w \in Ap(S,n)$ tal que $w \equiv x(mod n)$. Como $x \notin S$, então $x < w$ e portanto $x = w - kn$, para algum $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, pelo Lema 1.11. Distingamos dois casos:

Se $w = \frac{F(S)}{2} + n$, então $F(S) - x = F(S) - (w - kn) = F(S) - \frac{F(S)}{2} - n + kn = \frac{F(S)}{2} + (k-1)n$. Dado que $x \neq \frac{F(S)}{2}$, tem-se que $F(S) - x \neq \frac{F(S)}{2}$, donde $k - 1 > 0$, logo $F(S) - x \in S$.

Se $w \neq \frac{F(S)}{2} + n$, tem-se que $F(S) - x = F(S) - (w - kn) = F(S) - w + kn = F(S) + n - w + kn - n = F(S) + n - w + (k-1)n$, com $k > 1$. Mas, por hipótese, $F(S) + n - w \in Ap(S,n)$, logo $F(S) + n - w + (k-1)n \in S$, ou seja $F(S) - x \in S$. Por último, dado que F(S) é par, concluímos que S é pseudo-simétrico. □

Corolário 4.12: Seja S um semigrupo numérico. As condições seguintes são equivalentes:

1) S é pseudosimétrico.

2) $PF(S) = \left\{F(S), \frac{F(S)}{2}\right\}$.

Observemos que se S é um semigrupo numérico pseudosimétrico concluí-se que $t(S) = 2$. A condição $t(S) = 2$, por si só, não é suficiente para que se possa concluir que S é pseudo-simétrico, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 4.13: Seja $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$. Tem-se que $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13\}$. Então $PF(S) = \{11, 13\}$, donde $t(S) = 2$ e S não é pseudosimétrico, visto $F(S) = 13$.

Atendendo ao Corolário 4.12 e à definição de pseudo-número de Frobenius, obtemos o seguinte resultado.

COROLÁRIO 4.14: Seja S um semigrupo numérico e $n \in S\backslash\{0\}$. Então S é pseudosimétrico se e só se $Maximais \leq_S \left(Ap(S,n)\right) = \left\{\frac{F(S)}{2} + n;\ F(S) + n\right\}$.

Sabemos que a dimensão de imersão de um semigrupo numérico nunca excede a sua multiplicidade. Mostremos, em seguida, que nos semigrupos numéricos simétricos com multiplicidade maior do que dois e nos pseudo-simétricos com multiplicidade maior do que três, a multiplicidade excede a dimensão de imersão em pelo menos uma unidade.

Lema 4.15: Seja S um semigrupo numérico simétrico e $m(S) \geq 3$. Então

$$e(S) \leq m(S) - 1.$$

Dem. Seja S um semigrupo numérico simétrico com $m(S) \geq 3$. Tem-se que $Ap\big(S, m(S)\big) = \{0 = w_0 < w_1 < \cdots < w_{m(S)-1} = F(S) + m(S)\}$ e $w_i + w_{m(S)-1-i} = w_{m(S)-1}$, para todo o $i \in \{0, 1, \dots, m(S) - 1\}$ (Proposição 4.7). Assim, $w_{m(S)-1} = F(S) + m(S)$ não é um gerador minimal. Tem-se que pelo menos um dos elementos de $Ap\big(S, m(S)\big)\backslash\{0\}$ não é gerador minimal, logo $e(S) \leq m(S) - 1$. □

Do Lema 4.15 conclui-se que os únicos semigrupos numéricos simétricos com dimensão de imersão máxima são os que têm multiplicidade igual a dois.

Vejamos que o Lema 4.15 é válido para semigrupos numéricos pseudo-simétricos com multiplicidade maior ou igual a quatro. Os semigrupos numéricos pseudo-simétricos com multiplicidade igual três não verificam esta propriedade. Na verdade, todos os semigrupos numéricos pseudo-simétricos com multiplicidade igual a três têm máxima dimensão de imersão, uma vez que um conjunto de geradores de S é $\{m(S),\ F(S) + m(S), \frac{F(S)}{2} + m(S)\big\}$.

Lema 4.16: Seja S um semigrupo numérico pseudosimétrico com $m(S) \geq 4$. Então

$$e(S) \leq m(S) - 1.$$

Dem. Seja S um semigrupo numérico pseudosimétrico com $m(S) \geq 4$. Tem-se que $Ap(S, m(S)) = \{w_0 < w_1 < \cdots < w_{m(S)-2} = F(S) + m(S)\} \cup \left\{\frac{F(S)}{2} + m(S)\right\}$ e $w_i + w_{n-2-i} = w_{n-2}$ para todo o $i \in \{0, 1, \dots, m(S) - 2\}$. Assim, $w_{m(S)-2} = F(S) + m(S)$ não é um gerador minimal. Então, pelo menos um dos elementos de $Ap\big(S, m(S)\big)\backslash\{0\}$ não é gerador minimal, donde $e(S) \leq m(S) - 1$. □

4.2 Semigrupos numéricos irredutíveis com multiplicidade 3 e 4

Nesta secção estudamos os semigrupos numéricos irredutíveis com $m(S) = 3$ ou $m(S) = 4$. Pela Proposição 1.15, sabemos que $e(S) \leq m(S)$ e, além disso, temos que $e(S) \leq 3$, atendendo aos Lemas 4.15 e 4.16. Por outro lado, os semigrupos numéricos com $e(S) = 2$ são simétricos, como sabemos pelo Corolário 4.5, e foram estudados anteriormente no Exemplo 2.14. Vamos, então, considerar que $e(S) = 3$.

Seja S um semigrupo numérico irredutível com $e(S) = 3$ e $m(S) = 3$. Pelo Lema 4.15, concluímos que S é pseudo-simétrico.

Teorema 4.17: Seja S um semigrupo numérico. Então S é irredutível com $e(S) = 3$ e $m(S) = 3$ se e só se $S = \langle 3,\ x + 3,\ 2x + 3 \rangle$, em que x é um inteiro não divisível por 3.

Dem: *Condição necessária*. Se $e(S) = m(S) = 3$, então $\{3,\ n_2, n_3\}$ é um sistema minimal de geradores para S. Além disso S não pode ser simétrico. Então S é pseudo-simétrico, e portanto $F(S)$ é par e $Ap(S, 3) = \left\{ 0, \frac{F(S)}{2} + 3\ ,\ F(S) + 3 \right\}$. Consideremos que $x = \frac{F(S)}{2}$. Podemos concluir que $x \notin \langle 3 \rangle$, uma vez que $x \notin S$, então $Ap(S, 3) = \{ 0, x + 3\ , 2x + 3 \}$, em que x é um inteiro não divisível por 3. Logo,

$$S = \langle 3, x + 3, 2x + 3 \rangle.$$

Condição suficiente. Dado que $\{3,\ x + 3,\ 2x + 3\}$ é um sistema minimal de geradores para S, temos que $m(S) = e(S) = 3$ e $Ap(S, 3) = \{ 0, x + 3\ , 2x + 3 \}$. Então, pela Proposição 1.16, concluímos que $F(S) + 3 = 2x + 3$, donde $F(S) = 2x$. Então $F(S)$ é par e, considerando $x = \frac{F(S)}{2}$, tem-se que

$$Ap(S, 3) = \left\{ 0, \frac{F(S)}{2} + 3\ , \qquad F(S) + 3 \right\}.$$

Aplicando a Proposição 4.11, concluímos que S é pseudo-simétrico. □

Determinemos uma apresentação minimal para o semigrupo numérico pseudo-simétrico $S = \langle 3,\ x + 3,\ 2x + 3 \rangle$, em que x é um inteiro não divisível por 3.

Consideremos que $3 = n_1$, $x + 3 = n_2$ e $2x + 3 = n_3$. Sabemos pelo Teorema 2.11 que se G_n é não conexo então $n \in \{ 2n_2,\ n_2 +\ n_3,\ 2n_3 \}$. Estudemos os grafos associados a cada um destes valores de n.

Se $n = 2n_2$, temos que $n = 2x + 6 = 3 + (2x + 3)$. Então $n = 2n_2 = n_1 + n_3$. Além disso, $2n_2 - (n_1 + n_2) = n_2 - n_1 \notin S$ e $2n_2 - (n_3 + n_2) = n_2 - n_3 \notin S$, logo G_{2n_2} é não conexo.

Se $n = n_2 + n_3$, temos que $n = 3x + 6 = 3(x + 2)$. Então $n = n_2 + n_3 = (x + 2)n_1$. Como $n_2 + n_3 - (n_1 + n_2) = n_3 - n_1 \notin S$ e $n_2 + n_3 - (n_1 + n_3) = n_2 - n_1 \notin S$, concluímos que $G_{n_2+n_3}$ é não conexo, também.

Se $n = 2n_3$, tem-se que $n = 2n_3 = 4x + 6 \notin \langle n_1, n_2 \rangle$. Então n_3 é o único vértice do grafo G_{2n_3} , logo G_{2n_3} é conexo.

Então, $\delta = \{((1,0,1),(0,2,0)),((x+2,0,0),(0,1,1))\}$.

Por exemplo, fazendo $x = 4$, obtemos o semigrupo numérico $S = \langle 3,7,11 \rangle = \{0,3,6,7,9,10,\rightarrow\}$. Então $F(S) = 8$ e $\{4 + 3,\ 8 + 3\} \subseteq Ap(S,3) = \{0,7,11\}$. Concluímos que S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico, pela Proposição 4.11. Uma apresentação minimal para S é

$$\delta = \{((1,0,1),(0,2,0)),((6,0,0),(0,1,1))\}.$$

Passemos ao caso em que $e(S) = 3$ e $m(S) = 4$. Nestas condições, S pode ser simétrico ou pseudosimétrico. Analisemos estes dois casos separadamente.

Vejamos em seguida que se S é um semigrupo numérico simétrico com multiplicidade maior ou igual a 3, qualquer gerador minimal de S é menor do que $F(S)$.

Lema 4.18: Seja S um semigrupo numérico simétrico com $m(S) \geq 3$. Então todos os geradores minimais de S são menores do que $F(S)$.

Dem.: Seja S um semigrupo numérico e $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_p\}$ um sistema minimal de geradores de S, com $n_1 \geq 3$. Mostremos que $F(S) > n_p$. Tem-se que $n_p - n_1 \notin S$, visto que n_1 e n_p são geradores minimais de S, então $F(S) - (n_p - n_1) \in S$. Vejamos que $n_p - n_1 \neq F(S)$. Suponhamos que $n_p - n_1 = F(S)$. Tem-se que $n_p = n_1 + F(S)$. Se $p = 2$, tem-se que $S = \langle n_1 ,\ n_1 + F(S) \rangle$. Por outro lado, $F(S) + 1$ e $F(S) + 2$ pertencem a S, e $F(S) + 2 < F(S) + n_1$, portanto $F(S) + 1,\ F(S) + 2 \in \langle n_1 \rangle$, o que é impossível. Concluímos que $p \geq 3$. Neste caso, considerando outro dos geradores minimais de S, por exemplo n_2, tem-se que $n_p - n_2 \notin S$ com $n_p - n_2 \neq F(S)$ (visto que $n_p - n_1 = F(S)$) , logo $F(S) - (n_p - n_2) \in S\backslash\{0\}$, uma vez que S é simétrico. Assim, $F(S) = n_p - n_2 + s$, para algum $s \in$

$S\backslash\{0\}$, ou seja $F(S) = n_1 + F(S) - n_2 + s$, donde $n_2 = n_1 + s$, com $s \in S\backslash\{0\}$, o que é absurdo. Então $n_p - n_1 \neq F(S)$. Por último, como $F(S) - (n_p - n_1) \in S\backslash\{0\}$, tem-se que $F(S) = n_p - n_1 + s$, para algum $s \in S\backslash\{0\}$. Dado que $s \geq n_1$, obtém-se $F(S) \geq n_p$ e, uma vez que $F(S) \notin S$, concluímos que $F(S) > n_p$. □

Teorema 4.19: Seja S um semigrupo numérico. Então S é simétrico com $e(S) = 3$ e $m(S) = 4$ se e só se $S = \langle 4,\ 2x,\ x + 2y \rangle$, em que $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e x é um inteiro ímpar maior ou igual a 3.

Dem: *Condição necessária.* Seja $\{ 4, n_2, n_3 \}$ um sistema minimal de geradores de S, em que n_2 não é necessariamente menor do que n_3. Sabemos que n_2, n_3 e $F(S) + 4$ pertencem a $Ap(S, 4)$ e que $F(S) + 4$ não pode ser gerador minimal. Atendendo ao Lema 4.18, obtemos que $Ap(S, 4) = \{0,\ n_2, n_3, F(S) + 4\}$. Além disso, $n_2 + n_3 = F(S) + 4$, o que nos permite concluir que um destes geradores minimais é par e o outro é ímpar. Consideremos que n_2 é o gerador par. Tem-se que $n_2 = 2x > 4$, e $2x \notin \langle 4 \rangle$, o que implica que x é um número ímpar maior ou igual a 3. O gerador minimal n_3 é um número ímpar, logo $n_3 = x + 2y$. Vejamos quais as exigências a fazer ao inteiro y. Basta considerar $y \neq 0$, caso contrário $n_2 = 2n_3$. Nestas condições, n_3 é um inteiro ímpar maior ou igual a 5. Assim, $S = \langle 4,\ 2x,\ x + 2y \rangle$, em que $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e x é um inteiro ímpar maior ou igual a 3, e $F(S) = 2x + x + 2y - 4 = 3x + 2y - 4$.

Condição suficiente. Seja $S = \langle 4,\ 2x,\ x + 2y \rangle$, sendo x um número ímpar maior ou igual a 3 e y um inteiro positivo. Notemos que $x \geq 3$ e $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, assim 4 é o menor dos geradores do semigrupo numérico. Além disso, x é ímpar, donde $2x \notin \langle 4 \rangle$, e $x + 2y \notin \langle 4,\ 2x \rangle$ visto que $x + 2y$ é ímpar. Concluímos que $m.d.c(4, 2x, x + 2y) = 1$, logo $e(S) = 3$.

Provemos que S é simétrico, mostrando que $n_2 + n_3 \in Ap(S, 4)$, o que implica que $n_2 + n_3 = F(S) + 4$. Suponhamos que $n_2 + n_3 \notin Ap(S, 4)$. Então $n_2 + n_3 = 4k + s$, com $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e $s \in S$. Três casos se podem dar: $n_2 + n_3 = 4k$, $n_2 + n_3 = 4k + n_2$ e $n_2 + n_3 = 4k + n_3$. O primeiro é impossível visto que $n_2 + n_3$ é ímpar e $4k$ é par; se $n_2 + n_3 = 4k + n_2$, tem-se que $n_3 = 4k$. Este caso também é impossível visto que 4 e n_3 são geradores minimais. O mesmo argumento se aplica para justificar a impossibilidade de $n_2 + n_3 = 4k + n_3$, ou seja, $n_2 = 4k$. Obtemos que $Ap(S, 4) = \{0,\ n_2, n_3, n_2 + n_3\}$, logo S é simétrico e $F(S) = 3x + 2y - 4$. □

Determinemos uma apresentação minimal para o semigrupo numérico simétrico $S = \langle 4,\ 2x,\ x+2y \rangle$, em que $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e x é um inteiro ímpar maior ou igual a 3.

Consideremos que $4 = n_1$, $2x = n_2$ e $x + 2y = n_3$. Dado que $Ap(S,4) = \{0,\ n_2, n_3, n_2 + n_3 = F(S) + 4\}$, obtemos que se G_n é não conexo então $n \in \{2n_2,\ n_2 +\ n_3,\ 2n_3\ ,\ F(S) + 4 + n_2,\ F(S) + 4 + n_3\ \}$, pelo Teorema 2.11. Estudemos o grafo associado a cada um destes elementos de S:

Se $n = 2n_2$, obtemos que $n = 4x = x.n_1$. Temos que $2n_2 - (n_1 + n_2) = n_2 - n_1 \notin S$, donde G_{2n_2} é não conexo.

Se $n =\ n_2 +\ n_3$, obtemos que $n =\ n_2 +\ n_3 = F(S) + 4$, então $n - n_1 = F(S) \notin S$. Logo $G_{n_2+n_3}$ é conexo.

Se $n = 2n_3$, obtemos que $n = 2x + 4y = n_2 + yn_1$. Então $2n_3 = n_2 + yn_1$. Por outro lado, $2n_3 - (n_1 + n_3) = n_3 - n_1 \notin S$ e $2n_3 - (n_3 + n_2) = n_3 - n_2 \notin S$, logo G_{2n_3} é não conexo.

Se $n = F(S) + 4 + n_2$, obtemos que $n = n_2 + n_3 + n_2 = 2n_2 +\ n_3$. Como $n - n_1 = F(S) + n_2\ \in S$, concluímos que $n_1 \in V_{F(S)+4+n_2}$ Além disso, temos que $n - (n_1 +\ n_2) = F(S) \notin S$ mas $n - (n_1 +\ n_3) \in S$, porque $n - (n_1 +\ n_3) = 3x + 2y - 4 + 4 + 2x - (4 + x + 2y) = 4(x - 1) = n_1(x - 1) \in S$, com $x \geq 3$. Logo o grafo $G_{F(S)+4+n_2}$ é conexo.

Se $n =\ F(S) + 4 + n_3$, obtemos que $n = n_2 +\ 2n_3 = 2x + 2x + 4y = 2n_2 + yn_1$. Assim, $n = n_2 +\ 2n_3 = 2n_2 + yn_1$, e portanto o grafo associado a $n =\ F(S) + 4 + n_3$ também é conexo.

Então

$$\rho = \{((0,2,0),(x,0,0)),((0,0,2),(y,1,0))\}.$$

Por exemplo, fazendo $x = 5$ e $y = 3$, obtém-se $S =\ \langle\, 4,10,11\, \rangle$, ou seja, $S =\ \{0,4,8,10,11,12,14,15,16,18,\rightarrow\}$. Tem-se que $Ap(S,4) =\ \{\, 0,10,11,21\, \}$, donde $Maximais \leq_S \big(Ap(S,4)\big) = \{21\, \}$, o que nos permite concluir que S é simétrico e $F(S) = 21 - 4 = 17 =\ 3 \times 5 + 2 \times 3 - 4$.

Utilizando o resultado anterior, obtém-se uma apresentação minimal para S:

$$\rho = \{((0,2,0),(5,0,0)),((0,0,2),(3,1,0))\}.$$

Teorema 4.20: Seja S um semigrupo numérico. Então S é pseudo-simétrico com $e(S) = 3$ e $m(S) = 4$ se e só se $S = \langle 4,\ x+2,\ x+4 \rangle$ com $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e x ímpar maior ou igual a 3.

Dem. *Condição necessária*. Seja $\{4,\ n_2, n_3\}$ um sistema minimal de geradores para S. Dado que S é pseudo-simétrico, temos que $Ap(S,4) = \{0,\ n_2,\ n_3, F(S)+4\}$, pela Proposição 4.11. Além disso, sabemos que $\frac{F(S)}{2} + 4 \in Ap(S,4)$, pelo Lema 4.10. Dois casos se podem dar: $\frac{F(S)}{2} + 4$ pertence ao sistema minimal de geradores de S ou $\frac{F(S)}{2} + 4$ não pertence ao sistema minimal de geradores de S.

No primeiro caso, obtemos $Ap(S,4) = \{0, n_3, F(S)+4 = 2n_3\} \cup \left\{n_2 = \frac{F(S)}{2} + 4\right\}$. (Observemos que $2\,n_2 \notin Ap(S,n_1)$ porque $2\,n_2 - n_1 = F(S) + 4 \in S$). Considerando que $x = \frac{F(S)}{2}$, obtém-se $n_2 = x + 4$ e $n_3 = x + 2$. Além disso, uma vez que $F(S) = 2x$ e $F(x) \notin \langle 4 \rangle$, concluímos que x é ímpar e maior ou igual a 3, uma vez que 4 é o menor elemento positivo de S.

No segundo caso, verificamos que $Ap(S,4) = \{0,\ n_2,\ n_3\} \cup \left\{\frac{F(S)}{2} + 4\right\}$. Então, $F(S) + 4$ vai ser igual a n_2 ou a n_3. Suponhamos que $F(S) + 4 = n_2$. Pela proposição 4.11, $n_2 - n_3 \in S$, o que contradiz o facto de $\{4,\ n_2, n_3\}$ ser um sistema minimal de geradores de S.

Então $\frac{F(S)}{2} + 4$ pertence ao sistema minimal de geradores de S. Logo $S = \langle 4, x+2, x+4 \rangle$, em que x é um inteiro ímpar maior ou igual a 3.

Condição suficiente. Dado que $\{4,\ x+2,\ x+4\}$ é um sistema minimal de geradores para S, temos que $m(S) = 4$ e $e(S) = 3$. Como x é ímpar e maior ou igual a 3, então $2x \notin \langle 4 \rangle$, e portanto $2(x+2) \in Ap(S,4)$. Assim, $Ap(S,4) = \{0, x+2, x+4,\ 2x+4\}$, donde $F(S) = 2x$. Obtemos que

$$Ap(S,4) = \left\{0, \quad \frac{F(S)+4}{2}, \frac{F(S)}{2} + 4, \quad F(S) + 4\right\},$$

e pela Proposição 4.11, concluímos que S é pseudo-simétrico. □

Determinemos uma apresentação para este semigrupo numérico. Consideremos $S = \langle 4,\ x+2,\ x+4 \rangle$, com $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ e x ímpar maior ou igual a 3.

Sabemos pelo Teorema 2.11 que se G_n é não conexo então $n \in \{2n_2,\ n_2 + n_3,\ 2n_3,\ F(S) + n_1 + n_2,\ F(S) + n_1 + n_3\}$. Estudemos o grafo associado a cada um destes elementos:

Se $n = 2n_2$, tem-se $n \in Ap(S,n_1)$, logo $n_1 \notin V_n$. Além disso, $2n_2 - n_3 = x \notin S$, visto que se $x+4$ é um gerador minimal. Então n_2 é o único vértice de G_n, e portanto G_{2n_2} é conexo.

Se $n = n_2 + n_3$, tem-se que $n = 2x + 6 \notin Ap(S,n_1)$, logo $n_1 \in V_n$. Verificamos que n_1 é o único vértice de uma componente conexa, uma vez que $n - (n_1 + n_2) =$

$n_3 - n_1 \notin S$ e $n - (n_1 + n_3) = n_2 - n_1 \notin S$. Então $n = kn_1$, ou seja, $2x + 6 = 4k$, donde $k = \frac{x+3}{2}$. Observamos que ainda que k é um inteiro maior ou igual a 3. Então $G_{n_2+n_3}$ é não conexo e $n_2 + n_3 = \frac{x+3}{2}n_1$.

Se $n = 2n_3$, tem-se que $n = 2x + 8 = 2n_2 + n_1$. Vejamos que n_3 é o único vértice de uma componente conexa: $n - (n_1 + n_3) = n_3 - n_1 \notin S$ e $n - (n_2 + n_3) = n_3 - n_2 \notin S$. Então G_{2n_3} é não conexo e $2n_3 = n_1 + 2n_2$.

Se $n = F(S) + n_1 + n_2 = 3n_2$, tem-se que $n_1, n_2 \in V_n$ e $\overline{n_1n_2} \notin E_n$. Vejamos se $\overline{n_1n_3}$ ou $\overline{n_2n_3} \in E_n$. Temos que $n - (n_1 + n_3) = 2x - 2 = 2(x - 1) \in S$ porque $x - 1$ é um inteiro par maior ou igual a 2, donde $2(x - 1)$ é um múltiplo de 4. Assim $2x - 2 = 4k$, com $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, donde $k = \frac{x-1}{2}$. Então $n = n_1 + n_3 + kn_1 = (k + 1)n_1 + n_3 = \frac{x+1}{2}n_1 + n_3$. Finalmente, $n - (n_2 + n_3) = x \notin S$. Então o grafo $G_{F(S)+n_1+n_2}$ é não conexo e $F(S) + n_1 + n_2 = 3n_2 = \frac{x+1}{2}n_1 + n_3$.

Se $n = F(S) + n_1 + n_3$, temos que n_1, $n_3 \in V_n$ e $\overline{n_1n_3} \notin E_n$. Além disso, dado que $F(S) + n_1 = 2n_2$, obtemos que $n = 2n_2 + n_3$, donde $n_2 \in V_n$ e $\overline{n_2n_3} \in E_n$. Vejamos que $\overline{n_1n_2} \in E_n$. De facto, temos que $n - (n_1 + n_2) = F(S) + n_1 + n_3 - n_1 - n_2 = 2x + 2 = 2(x + 1) \in S$ porque $x + 1$ é um inteiro par maior ou igual a 4, donde $2(x + 1)$ é um múltiplo de 4. Assim, $n = n_1.\frac{x+1}{2} + n_1 + n_2 = \frac{x+3}{2}n_1 + n_2$, então $n = n_2 + n_3 = \frac{x+3}{2}n_1 + n_2$, logo o grafo G_n é conexo.

Assim,

$$\rho = \left\{\left((0,1,1), \left(\frac{x+3}{2}, 0, 0\right)\right), ((1,2,0), (0,0,2)), \left((0,3,0), \left(\frac{x+1}{2}, 0, 1\right)\right)\right\}.$$

Capítulo 5

Decomposição de um semigrupo numérico em irredutíveis

Neste capítulo estudamos a decomposição de um semigrupo numérico em semigrupos numéricos irredutíveis. Começamos por mostrar que todo o semigrupo numérico pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos irredutíveis e apresentamos um método algorítmico para determinar uma decomposição minimal em irredutíveis, relativamente ao número de semigrupos numéricos. Em seguida, caracterizamos os semigrupos numéricos que são intersecção de semigrupos numéricos simétricos e, a finalizar, os que são intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos.

5.1. Decomposição de um semigrupo numérico em irredutíveis

Seja S um semigrupo numérico. Mostremos que S pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos irredutíveis, ou seja, existem $S_1, \dots, S_n$ irredutíveis, tal que $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$. Uma vez que $S \subseteq S_i$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n\}$, importa então conhecer os semigrupos numéricos que contêm S. Vejamos que, dado um semigrupo numérico S é possível determinar o conjunto de todos os semigrupos numéricos que contêm S. Para construirmos estes semigrupos, precisamos de caracterizar os elementos x de $G(S)$ para os quais $S \cup \{x\}$ é ainda um semigrupo numérico. Obtemos o conceito de falha fundamental.

Dado um semigrupo numérico S, designa-se por **falha fundamental** de S todo o elemento do conjunto

$$EG(S) = \{ x \in PF(S) |\ 2x \in S \}.$$

Note-se que $\{F(S)\} \subseteq EG(S) \subseteq PF(S) \subseteq G(S)$.

Proposição 5.1: Seja S um semigrupo numérico e $x \in G(S)$. Então $x \in EG(S)$ se e só se $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico.

Dem. *Condição necessária.* Seja S um semigrupo numérico e $x \in EG(S)$. Provemos que $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico. O complementar de $S \cup \{x\}$ em $\mathbb{N}$ é finito. Então basta provar que a soma de dois elementos quaisquer de $S \cup \{x\}$ é um elemento de $S \cup \{x\}$. Sejam $a, b \in S \cup \{x\}$. Se $a, b \in S$, tem-se que $a + b \in S$, visto que S é semigrupo numérico. Se um deles for igual a x, por exemplo a, e se $b \neq 0$, tem-se $a + b = x + b \in S$, visto que $x \in PF(S)$. Se forem ambos iguais a x, tem-se $a + b = 2x \in S$, visto que $x \in EG(S)$. Se $a = x$ e $b = 0$, tem-se $a + b = x \in S \cup \{x\}$.

Condição suficiente. Seja S um semigrupo numérico. Consideremos $x \in G(S)$, tal que $S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico. Provemos que $x \in EG(S)$. Consideremos $s \in S \backslash \{0\}$. Temos que $x + s \in S \cup \{x\}$ e $x + s \neq x$, donde $x + s \in S$ qualquer que seja $s \in S \backslash \{0\}$. Analogamente, $2x = x + x \in S \cup \{x\}$, e $2x \neq x$, o que implica que $2x \in S$.

□

Dados dois semigrupos numéricos S e T, com $S \subsetneq T$, é possível encontrar um semigrupo numérico W tal que $S \subset W \subseteq T$. De facto, considerando $x = máx(T \backslash S)$, tem-se que $x + s \in T$ e $x + s > x$, donde $x + s \in S$, qualquer que seja $s \in S \backslash \{0\}$, e portanto $x \in PF(S)$. Analogamente, $2x \geq x$ e $2x \in T$, donde $2x \in S$. Concluímos que $x \in EG(S)$ e, consequentemente, que $W = S \cup \{x\}$ é um semigrupo numérico.

Lema 5.2: Sejam S e T semigrupos numéricos tais que $S \subsetneq T$. Então $S \cup \{máx(T \backslash S)\}$ é um semigrupo numérico, ou equivalentemente, $máx(T \backslash S) \in EG(S)$.

Em particular, se os semigrupos S e T referidos no lema anterior tiverem o mesmo número de Frobenius, então $F(S \cup \{x\}) = F(S) = F(T)$. Efectivamente, o elemento que se junta a S pertence a T, donde $x \neq F(T) = F(S)$, pelo que $máx\, (\mathbb{N} \setminus (S \cup \{x\}) = F(S) = F(T)$.

Seja S um semigrupo numérico. Denotamos por $O(S)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos que contêm S. A Proposição 5.1 dá-nos um método algorítmico para construir $O(S)$, que passamos a descrever. Começamos por considerar $O(S) = \{S\}$. Numa primeira etapa, determinamos $EG(S)$ e juntamos ao conjunto $O(S)$ os semigrupos numéricos da forma $S' = S \cup \{x_i\}$, com $x_i \in EG(S)$. Repetimos este procedimento para os novos semigrupos S' de $O(S)$ que não sejam iguais a $\mathbb{N}$ até não haver mais elementos para juntar. Esta construção terminará após um número finito de etapas, uma vez que o complementar de S em $\mathbb{N}$ é finito e $EG(\mathbb{N}) = \emptyset$. Assim, o conjunto $\mathcal{O}(S)$ é finito.

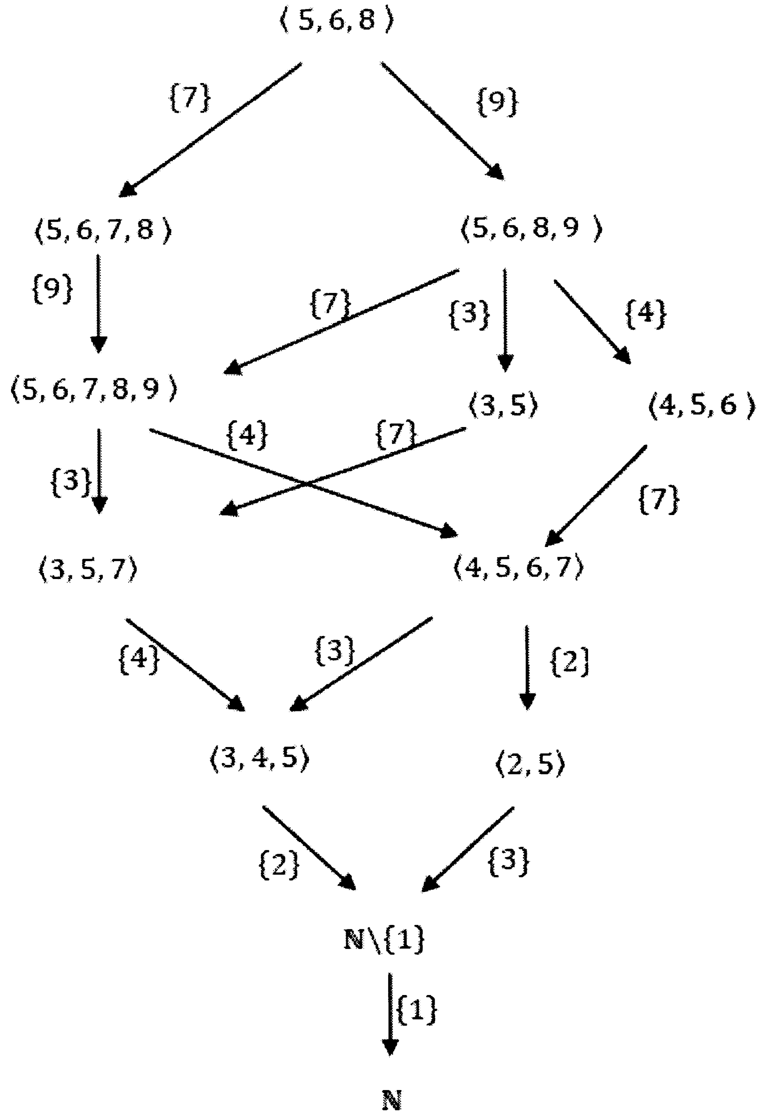
Observemos que os semigrupos numéricos formados a partir da Proposição 5.1 podem ou não ter o mesmo número de Frobenius.

Seja S um semigrupo numérico e $x_i \in EG(S)$. Consideremos o semigrupo numérico $S' = S \cup \{x_i\}$. Se $x_i \neq F(S)$, os semigrupos S e S′ têm o mesmo número de Frobenius e $S \subset S \cup \{x_i\}$. Assim, S não é irredutível, uma vez que não é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius $F(S)$ (ver Teorema 4.1). Se $x_i = F(S)$, tem-se $F(S') < F(S)$. Concluímos que um semigrupo numérico S é irredutível se $F(S)$ é a sua única falha fundamental, o que nos permite apresentar uma caracterização alternativa para os semigrupos numéricos irredutíveis.

Corolário 5.3: Um semigrupo numérico S é irredutível se e só se $\# EG(S) = 1$.

Observemos que o corolário anterior não contradiz a caracterização dos semigrupos numéricos pseudo-simétricos em função do seu tipo, que foi apresentada no Corolário 4.12. De facto, $\frac{F(S)}{2} \notin EG(S)$, uma vez que $2\frac{F(S)}{2} = F(S) \notin S$.

Consideremos o semigrupo numérico $S = \langle 5, 6, 8 \rangle$. Calculando $EG(S) = \{7, 9\}$ e seguindo a construção anterior, obtêm-se na primeira etapa $S \cup \{7\} = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle$ e $S \cup \{9\} = \langle 5, 6, 8, 9 \rangle$. Estes dois semigrupos numéricos contêm S e são os únicos elementos de $\mathcal{O}(S)$ que diferem de S em um elemento, apenas. Em seguida, calculando $EG(S \cup \{7\}) = \{9\}$ e $EG(S \cup \{9\}) = \{3, 4, 7\}$, obtemos três novos semigrupos numéricos: $S \cup \{7, 9\}$, $S \cup \{3, 9\}$ e $S \cup \{4, 9\}$, e assim sucessivamente. A figura seguinte mostra quais são e como ficam ordenados os elementos de $\mathcal{O}(S)$, relativamente à inclusão de conjuntos.



Utilizando o Corolário 5.3, podemos remover de $\mathcal{O}(S)$ todos os semigrupos numéricos que não são irredutíveis. Obtemos assim o conjunto que contém todos os semigrupos numéricos irredutíveis que contêm S, que denotamos por

$$\Im(S) = \{\bar{S} \text{ irredutível} \mid \bar{S} \in \mathcal{O}(S)\}.$$

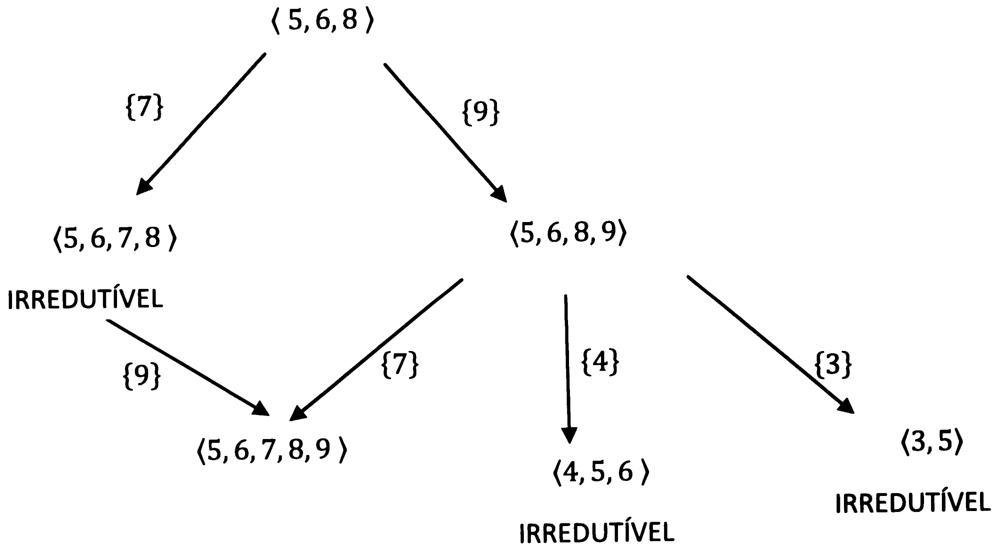
Resulta que $S = \bigcap_{T \in \Im(S)} T$. Além disso, podemos remover os semigrupos numéricos que não são minimais, relativamente à inclusão de conjuntos, que o resultado não se altera.

Relativamente ao semigrupo numérico S do exemplo anterior, tem-se que $\Im(\langle 5,6,8\rangle) = \{\langle 5,6,7,8\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5,6\rangle, \langle 3,5,7\rangle, \langle 3,4,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,3\rangle\}$.

Logo

$$S = \langle 5,6,7,8\rangle \cap \langle 3,5\rangle \cap \langle 4,5,6\rangle \cap \langle 3,5,7\rangle \cap \langle 3,4,5\rangle \cap \langle 2,5\rangle \cap \langle 2,3\rangle.$$

Vejamos quais são os elementos minimais neste conjunto. Atendendo ao método utilizado para a obtenção destes semigrupos numéricos, os elementos minimais são os que se situam na parte de cima dos "ramos" .



O semigrupo $\langle 5,6,7,8,9\rangle$ não é irredutível, visto que tem máxima dimensão de imersão ($e(S) = m(S) = 5$), mas contém o semigrupo numérico $\langle 5,6,7,8\rangle$ que é irredutível, pelo que qualquer semigrupo numérico irredutível que contenha $\langle 5,6,7,8,9\rangle$ não será minimal em $\Im(S)$, sendo desnecessário procurar mais abaixo nos ramos.

Assim, Minimais $_\subseteq \Im(S) = \{\langle 5,6,7,8\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,5,6\rangle\}$, logo

$$S = \langle 5,6,7,8\rangle \cap \langle 3,5\rangle \cap \langle 4,5,6\rangle.$$

Observamos que podemos tirar o semigrupo numérico $S \cup \{3,9\}$ ou o semigrupo numérico $S \cup \{4,9\}$ que o resultado não se altera, obtendo, assim, decomposições distintas de S.

Apresentamos em seguida o resultado seguinte.

Teorema 5.4: Seja S um semigrupo numérico e Minimais $_\subseteq (\Im(S)) = \{S_1, \dots, S_r\}$. Então $S = S_1 \cap \dots \cap S_r$.

Já vimos que esta decomposição não é necessariamente minimal, no sentido de envolver o menor número possível de irredutíveis, no entanto para obtermos uma decomposição minimal com o menor número possível de elementos basta procurar entre as decomposições $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$, com $S_i \in$ Minimais $_\subseteq (\Im(S))$.

Teorema 5.5: Seja S um semigrupo numérico. Se $S = S_1 \cap \ldots \cap S_n$, com $S_i \in \Im(S)$, então existem $S'_1, \ldots, S'_n \in$ Minimais $_{\subseteq}(\Im(S))$, tais que $S = S'_1 \cap \ldots \cap S'_n$.

Dem. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se S_i não pertencer a Minimais $_{\subseteq}(\Im(S))$, toma-se um elemento $S'_i \in$ Minimais $_{\subseteq}(\Im(S))$ tal que $S'_i \subseteq S_i$. □

A propriedade seguinte dá-nos informação sobre os semigrupos numéricos que fazem parte de uma decomposição minimal.

Teorema 5.6: Sejam S e $S_1, \ldots, S_n$ semigrupos numéricos, com $S_i \in \Im(S)$. Então $S = S_1 \cap \ldots \cap S_n$ se e só se para cada $h \in EG(S)$ existe um $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $h \notin S_i$.

Dem. *Condição necessária.* Se $h \in S_i$, qualquer que fosse $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que $h \in S$.

Condição suficiente. Visto que $S_i \in \Im(S)$, temos que $S \subseteq S_1 \cap \ldots \cap S_n$. Agora, suponhamos que $S \subset S_1 \cap \ldots \cap S_n$. Então $S \cup \{máx((S_1 \cap \ldots \cap S_n) \backslash S)\}$ é um semigrupo numérico, pelo Lema 5.2, donde $h = máx((S_1 \cap \ldots \cap S_n) \backslash S) \in EG(S)$. Obtemos que $h \in EG(S)$ e $h \in S_i$, qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, n\}$, o que contradiz a hipótese. Logo $S = S_1 \cap \ldots \cap S_n$. □

Para cada $S_i \in$ Minimais $_{\subseteq}\Im(S) = \{S_1, \ldots, S_n\}$, definimos

$$C(S_i) = \{ h \in EG(S) \mid h \notin S_i \}.$$

Usando a Proposição anterior, temos que

$S = S_{i_1} \cap \ldots \cap S_{i_r}$ se e só se $C(S_{i_1}) \cup \ldots \cup C(S_{i_r}) = EG(S)$.

Com os resultados anteriores podemos obter um método algorítmico para a determinação de uma decomposição minimal de S:

Método algorítmico 5.7: Seja S um semigrupo numérico não irredutível. Podemos obter uma decomposição minimal de S em irredutíveis utilizando o seguinte procedimento:

1) Determinar EG(S).

2) Considerar $I = \emptyset$ e $C = \{S\}$.

3) Para cada S' pertencente a C, calcular (usando a Proposição 5.1) os semigrupos $\bar{S}$ tais que $\#(\bar{S}\setminus S') = 1$. Remover S' de C. Considerar B o conjunto dos semigrupos numéricos assim formados.

4) Remover de B os semigrupos S' tais que $EG(S) \subseteq S'$.

5) Remover de B os semigrupos S' tais que existe $\tilde{S} \in I$ com $\tilde{S} \subseteq S'$.

6) Considerar $C = \{S' \in B |\, S'$não é irredutível$\}$.

7) Considerar $I = I \cup \{S' \in B |\, S'$ é irredutível$\}$.

8) Se $C \neq \emptyset$, ir para a etapa 3.

9) Para cada $S_i \in I$, determinar $C(S_i)$.

10) Escolher $\{S_1, \dots, S_r\}$ tal que r é o menor inteiro que satisfaz a condição
$$C(S_1) \cup \dots \cup C(S_r) = EG(S).$$

11) Fazer $S_1, \dots, S_r$.

Obtém-se $S = S_1 \cap \dots \cap S_r$.

Exemplo 5.8: Utilizemos o método anterior para decompor novamente o semigrupo numérico $S = \langle 5,6,8 \rangle$ novamente. Calculamos $EG(S) = \{7,9\}$. Percorrendo as etapas do algoritmo, obtém-se em 6) $C = \{\langle 5,6,8,9 \rangle\}$ e em 7) $I = \{\langle 5,6,7,8 \rangle\}$. Como $C \neq \emptyset$, voltamos à etapa 3). Calculamos $EG(\langle 5,6,8,9 \rangle) = \{3,4,7\}$ e obtemos $B = \{\langle 3,5 \rangle, \langle 4,5,6 \rangle, \langle 5,6,7,8,9 \rangle\}$. O semigrupo numérico $\langle 5,6,7,8,9 \rangle$ é excluído de B porque contém $EG(S)$, e os semigrupos numéricos $\langle 3,5 \rangle$ e $\langle 4,5,6 \rangle$ são irredutíveis, donde $I = \{\langle 5,6,7,8 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 4,5,6 \rangle\}$ e $C = \emptyset$. Na etapa 9) obtemos $C(\langle 5,6,7,8 \rangle) = \{9\}$, $C(\langle 3,5 \rangle) = \{7\}$ e $C(\langle 4,5,6 \rangle) = \{7\}$. Assim, as decomposições minimais de S são
$$S = \langle 5,6,7,8 \rangle \cap \langle 3,5 \rangle \quad \text{e} \quad S = \langle 5,6,7,8 \rangle \cap \langle 4,5,6 \rangle.$$

Proposição 5.9: Todo o semigrupo numérico S pode ser escrito como intersecção de um número finito de semigrupos numéricos irredutíveis.

5.2 Decomposição em semigrupos numéricos simétricos

Analisemos agora os semigrupos numéricos da decomposição. Dizemos que um semigrupo numérico é ***ímpar*** se pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos e ***par*** se a decomposição envolve apenas semigrupos numéricos pseudo-simétricos. Notemos ainda que todo o semigrupo numérico é ímpar, par ou intersecção de um semigrupo numérico ímpar com um par. Nesta secção estudamos os semigrupos numéricos que podem ser expressos como intersecção de semigrupos numéricos simétricos. Vejamos como se caracterizam estes semigrupos.

Atendendo à Proposição 4.1 e à definição de semigrupo numérico simétrico, podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 5.10: Seja F um inteiro e $S(F)$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos com número de Frobenius F. Então um semigrupo $S \in S(F)$ é simétrico se e só se F é ímpar e S é maximal relativamente à inclusão de conjuntos em $S(F)$.

Lema 5.11: Sejam S um semigrupo numérico e $x \in G(S)$. Então existe um semigrupo numérico irredutível $\bar{S}$ tal que $S \subseteq \bar{S}$ e $F(\bar{S}) = x$.

Dem. Seja S um semigrupo numérico e $T = S \cup \{x+1, x+2, \dots\}$. T é um semigrupo numérico e $F(T) = x$. Consideremos o conjunto $S(x)$ e um semigrupo $\bar{S}$ maximal em $S(x)$ tal que $T \subseteq \bar{S}$. Utilizando o Teorema 4.1, podemos concluir que $\bar{S}$ é irredutível. □

Em particular, se x for um inteiro ímpar, o semigrupo numérico $\bar{S}$ referido no Lema 5.11 é simétrico e se x for um inteiro par, $\bar{S}$ é pseudo-simétrico.

Lema 5.12: Sejam S um semigrupo numérico e x um inteiro par que não pertence a S. As duas condições seguintes são equivalentes.

1) Existe um semigrupo simétrico $\bar{S}$ que contém S tal que $x \notin \bar{S}$.

2) Existe um inteiro positivo ímpar y tal que $x + y \notin \langle S, y\rangle$.

Dem. 1) *implica* 2). Sejam x um inteiro par que não pertence a $\bar{S}$ e $F(\bar{S})$ o número de Frobenius de $\bar{S}$. Como $\bar{S}$ é simétrico, temos que $F(\bar{S})$ é ímpar, então $y = F(\bar{S}) - x$ é ímpar e além disso $y \in \bar{S}$. Donde $x + y = F(\bar{S}) \notin \bar{S}$ e dado que $\langle S, y\rangle \subseteq \bar{S}$, concluímos que $x + y \notin \langle S, y\rangle$.

2) *implica* 1). Consideremos o inteiro ímpar $x + y$ que não pertence a $\langle S, y \rangle$. Então existe um semigrupo numérico simétrico $\bar{S}$ que contém $\langle S, y \rangle$, e contém S, tal que $F(\bar{S}) = x + y$ (a existência de $\bar{S}$ está garantida pelo Lema 5.11). Por último,

verificamos que $x \notin \bar{S}$, caso contrário $x+y \in \bar{S}$, o que é impossível atendendo a que $x+y = F(\bar{S})$. □

Podemos agora apresentar uma condição necessária e suficiente para que um semigrupo numérico possa ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos.

Teorema 5.13: Seja S um semigrupo numérico. Então S pode ser escrito como intersecção de semigrupos numéricos simétricos se e só se para cada inteiro par $x \notin S$ existe um inteiro ímpar y tal que $x+y \notin \langle S, y\rangle$.

Dem. *Condição necessária.* Seja x um inteiro par que não pertence a S. Por hipótese, S pode ser escrito como intersecção de semigrupos numéricos simétricos, ou seja, $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$, com S_i simétrico e $S \subseteq S_i$, qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \notin S_j$. Dado que o semigrupo numérico simétrico S_j contém S, utilizando o Lema 5.12, concluímos que existe um inteiro ímpar y tal que $x+y \notin \langle S, y\rangle$.

Condição suficiente. Seja $G(S) = \{x_1, \ldots, x_t\}$ e $x \in G(S)$. Se x é ímpar consideremos o semigrupo numérico simétrico S_x, com número de Frobenius x e que contém S, cuja existência está garantida pelo Lema 5.11. Se x é par consideremos S_x um semigrupo numérico simétrico que contém S e tal que $x \notin S_x$, cuja existência está garantida pelo Lema 5.12. Mostremos que $S = S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$. É claro que $S \subseteq S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$, uma vez que $S \subseteq S_{x_i}$, qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, t\}$. Vejamos agora que S não está contido estritamente em $S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$ e, portanto, $S = S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$. Suponhamos que $S \subset S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$. Então existe $s \in S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$ tal que $s \notin S$, donde $s \notin S_{x_i}$, para algum $i \in \{1, \ldots, t\}$, logo $s \notin S_{x_1} \cap \ldots \cap S_{x_t}$, o que contradiz a hipótese. □

De acordo com o teorema anterior, o semigrupo $S = \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11\rangle$, por exemplo, não pode ser escrito com intersecção de semigrupos numéricos simétricos. De facto, $4 \in G(S)$ e $4+y \in \langle S, y\rangle$, para todo o inteiro ímpar y ($4+1 \in \langle S, 1\rangle = \mathbb{N}$ e $4+y \in \langle S, y\rangle$, se $y \geq 3$).

Lema 5.14: Sejam S, S_1, $S_2, \ldots, S_n$ semigrupos tais que $S = S_1 \cap S_2 \ldots \cap S_n$. Então $F(S) = \text{máx}\,\{F(S_1), F(S_2), \ldots, F(S_n)\}$.

Dem. Tem-se que $F(S) \notin S$, logo existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $F(S) \notin S_i$. Então F(S_i) $\geq F(S)$ e portanto máx $\{F(S_1), F(S_2), \ldots, F(S_n)\} \geq F(S)$. Além disso, como

$S \subseteq S_i$, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n\}$, obtém-se $F(S) \geq F(S_i)$ e, em particular, $F(S) \geq$ máx$\{F(S_1), F(S_2), \dots, F(S_n)\}$. Logo $F(S) =$ máx$\{F(S_1), F(S_2), \dots, F(S_n)\}$. □

Daqui resulta que só os semigrupos numéricos com número de Frobenius ímpar podem ser escritos como intersecção de semigrupos numéricos simétricos.

Lema 5.15: Se S pode ser expresso como intersecção de semigrupos simétricos, então $F(S)$ é ímpar.

O recíproco desta propriedade não é necessariamente verdadeiro. Se considerarmos novamente o semigrupo $S = \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle$, verificamos que o seu número de Frobenius é ímpar, $F(S) = 5$, e S não pode ser escrito como intersecção de simétricos, como já referimos.

A proposição seguinte generaliza o exemplo anterior.

Proposição 5.16: Seja m um inteiro maior ou igual a 3. Então o semigrupo numérico $S = \langle m, m+1, m+2, \dots, m+m-1 \rangle$ não pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos.

Dem. Se m é ímpar, $F(S)$ é par e a conclusão é imediata (Lema 5.15). Vejamos o caso em que m é par. Temos que $F(S) = m - 1$ é um número ímpar. No entanto, considerando, por exemplo o inteiro par $m - 2$, que não pertence a S, temos que $m - 2 + 1 \in \langle S, 1 \rangle$ e $m - 2 + y \in S \subseteq \langle S, y \rangle$, qualquer que seja $y \geq 3$, logo S não pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos, pelo Teorema 5.13. □

Relembremos que qualquer semigrupo numérico com dimensão de imersão 2 é simétrico, pelo que qualquer semigrupo que possa ser escrito como intersecção de semigrupos com dois geradores minimais pode ser escrito como intersecção de simétricos.

Por exemplo, o semigrupo $S = \langle 4, 5 \rangle \cap \langle 4, 7 \rangle = \langle 4, 14, 15, 21 \rangle$ pode ser escrito como intersecção de dois semigrupos numéricos simétricos.

Estudemos, em seguida, condições suficientes para que um semigrupo numérico possa ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos.

Os pseudo-números de Frobenius de S têm um papel semelhante ao do número de Frobenius de um semigrupo numérico simétrico, como sabemos pela Proposição 1.22.

Proposição 5.17: Seja S um semigrupo numérico. Se todos os pseudo-números de Frobenius de S são ímpares, então S pode ser escrito como intersecção finita de semigrupos numéricos simétricos.

Dem. Suponhamos que e $f_1, \ldots, f_t$ são os pseudo-números de Frobenius de S, todos ímpares. Para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$, existe um semigrupo simétrico S_{f_i} que contém S e cujo número de Frobenius é f_i (a existência destes semigrupos é garantida pelo Lema 5.11).

Mostremos que $S = S_{f_1} \cap \ldots \cap S_{f_t}$. Dado que todos os semigrupos contêm S, basta mostrar que $S_{f_1} \cap \ldots \cap S_{f_t}. \subseteq S$. Consideremos $x \notin S$. A Proposição 1.22 assegura que existe um pseudo-número de Frobenius f_i tal que $f_i - x \in S$, então $f_i - x \in S_{f_1} \cap \ldots \cap S_{f_t}$ e, consequentemente, $f_i - x \in S_{f_i}$. Utilizando novamente a Proposição 1. 22, concluímos que $x \notin S_{f_i}$. □

O recíproco desta propriedade nem sempre é verdadeiro. Consideremos novamente o semigrupo referido no exemplo anterior, $S = \langle 4, 14, 15, 21 \rangle$. Então $Ap(S, 4) = \{ 0, 14, 15, 21 \}$, donde $PF(S) = \{10, 11, 17\}$. Verificamos que o semigrupo S pode ser escrito como intersecção de semigrupos numéricos simétricos, no entanto um dos pseudo-número de Frobenius de S é par.

Teorema 5.18: Seja S um semigrupo numérico e $f_1, \ldots, f_t$ os pseudo-números de Frobenius de S. Então S pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos se e só se para cada pseudo-número de Frobenius par, f_i, de S existe um inteiro ímpar y_i tal que $f_i + y_i \notin \langle S, y_i \rangle$.

Dem. *Condição necessária.* É uma consequência do Teorema 5.13: para cada f_i par ($f_i \notin S$) existe um inteiro ímpar y_i tal que $f_i + y_i \notin \langle S, y_i \rangle$.

Condição suficiente. Seja $f_i \in PF(S)$. Se f_i é par o Lema 5.12 garante a existência de um semigrupo numérico simétrico S_{f_i} tal que $S \subseteq S_{f_i}$ e $f_i \notin S_{f_i}$. Se f_i é ímpar o Lema 5.11 garante a existência de um semigrupo numérico simétrico S_{f_i} tal que $S \subseteq S_{f_i}$ e $F(S_{f_i}) = f_i$. Temos que $S = S_{f_1} \cap \ldots \cap S_{f_t}$. A demonstração desta igualdade é igual à efectuada na demonstração da Proposição 5.17. □

Corolário 5.19: Seja S um semigrupo numérico que possa ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos. Então S pode ser expresso como intersecção de $t(S)$ semigrupos numéricos simétricos.

A demonstração da condição suficiente do teorema 5.18 sugere um método para escrever um semigrupo numérico como intersecção de semigrupos numéricos simétricos: para cada um dos t pseudo-números de Frobenius de S é construído um semigrupo numérico com número de Frobenius ímpar (f_i se f_i é ímpar ou $f_i + y_i$, com y_i ímpar, se f_i é par) e é determinado um semigrupo numérico simétrico que contém esse semigrupo numérico e tem o mesmo número de Frobenius. O semigrupo numérico S pode ser expresso como intersecção dos t semigrupos numéricos simétricos obtidos. Vejamos como se constroem estes semigrupos numéricos simétricos.

Seja S um semigrupo numérico com número de Frobenius ímpar. Vamos considerar que o semigrupo numérico em causa não é simétrico, uma vez que se o for a decomposição é trivial. Utilizando o Lema 5.11, podemos construir um semigrupo numérico com o mesmo número de Frobenius de S e que contêm S. De facto, tomando $h = \text{máx}\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S \text{ e } F(S) - x \notin S\}$, tem-se $h \neq \frac{F(S)}{2}$, visto que F(S) é ímpar, logo $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico e $F(S \cup \{h\}) = F(S)$ (Lema 4.2). Repetindo este procedimento, podemos construir uma sequência de semigrupos numéricos que contêm o semigrupo numérico S e que têm o mesmo número de Frobenius de S:

$$S^0 = S,$$

$$S^{j+1} = S^j \cup \{h_j\} \text{ com } h_j = \text{máx}\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^j \text{ e } F - x \notin S^j\}.$$

Esta sequência vai ser finita, uma vez que o complementar de S em $\mathbb{N}$ é finito. Assim, existe um inteiro r tal que $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^r \text{ e } F - x \notin S^r\} = \emptyset$. O semigrupo numérico S^r que se obtém na última etapa é simétrico, por construção, contém S e tem o mesmo número de Frobenius que S, $F(S^r) = F(S) = F$.

Podemos agora apresentar um exemplo para ilustrar o método aqui sugerido.

Exemplo 5. 20: Consideremos o semigrupo numérico $S = \langle 4, 14, 15, 21 \rangle$.

Tem-se $S = \{0, 4, 8, 12, 14, 15, 16\} \cup \{x \geq 18\}$, logo $F(S) = 17$. Escrevamos S como intersecção de semigrupos numéricos simétricos.

Começamos por determinar $PF(S) = \{10, 11, 17\}$. Já sabemos que S pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos simétricos (porque $S = \langle 4, 5 \rangle \cap \langle 4, 7 \rangle$). Se não tivéssemos esta informação, teríamos de averiguar se S satisfaz as condições do Teorema 5.18. De facto, o semigrupo numérico S satisfaz essas condições, visto que $10 + 7 \notin \langle S, 7\rangle$. Pela demonstração do Teorema 5.18, concluímos que para cada $f_i \in PF(S)$ existe um semigrupo numérico simétrico S_{f_i} que contém S e tal que $S = S_{10} \cap S_{11} \cap S_{17}$.

Vejamos quais são e como se obtêm os semigrupos numéricos da decomposição:

S_{17} é um semigrupo numérico simétrico que contém S e com $F(S_{17}) = 17$, então S_{17} contém $S' = S \cup \{x \geq 18\} = S$. A existência deste semigrupo numérico é garantida pelo Lema 5.11 e a sua construção pode fazer-se recorrendo ao Lema 4.2 e à sequência referida antes deste exemplo. Começamos por determinar as falhas de S', $G(S') = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 17\}$, e em seguida construímos a sequência de semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius de S' e que contêm S':

$S^0 = S'$,

$S^1 = S^0 \cup \{h_0\}$, com $h_0 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^0 \; e \; 17 - x \notin S^0\} = 13$, logo $S^1 = S' \cup \{13\}$.

$S^2 = S^1 \cup \{h_1\}$, com $h_1 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^1 \; e \; 17 - x \notin S^1\} = 11$, logo $S^1 = S' \cup \{11, 13\}$.

$S^3 = S^2 \cup \{h_2\}$ com $h_2 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^2 \; e \; 17 - x \notin S^2\} = 10$, logo $S^1 = S' \cup \{10, 11, 13\}$.

O conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^3 \; e \; 17 - x \notin S^3\}$ é vazio, logo S^3 é simétrico, e portanto $S_{17} = S^3$.

Assim,$S_{17} = S' \cup \{10, 11, 13\} = \langle 4, 10, 11, 13\rangle$.

S_{11} é um semigrupo numérico simétrico que contém S e cujo número de Frobenius é 11, então S_{11} contém $S' = S \cup \{x \geq 12\} = \{0, 4, 8, 12, 13, \rightarrow\}$. A construção de S_{11} pode fazer-se recorrendo novamente ao Lema 4.2. Construímos a sequência de semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius de S' e que contêm S':

$S^0 = S'$,

$S^1 = S^0 \cup \{h_0\}$ com $h_0 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^0 \; e \; 11 - x \notin S^0\} = 10$, logo $S^1 = S' \cup \{10\}$

$S^2 = S^1 \cup \{h_1\}$ com $h_1 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^1 \; e \; 11 - x \notin S^1\} = 9$, logo $S^1 = S' \cup \{9, 10\}$.

$S^3 = S^2 \cup \{h_2\}$ com $h_2 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^2 \; e \; 11 - x \notin S^2\} = 6$ logo $S^1 = S' \cup \{6, 9, 10\}$.

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^3 \; e \; 11 - x \notin S^3\} = \{ \quad \}$, logo S^3 é simétrico.

Tem-se $S_{11} = S^3 = \langle 4, 6, 9 \rangle$.

Por último, o semigrupo numérico S_{10} é um semigrupo numérico simétrico que contém $\langle S, 7 \rangle$, e consequentemente contém S, cujo número de Frobenius é 17, ou seja, S_{10} contém $\langle S, 7 \rangle \cup \{x \geq 18\} = \langle S, 7 \rangle$. Mas $\langle S, 7 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 16\} \cup \{x \geq 18\}$, donde $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \langle S, 7 \rangle \; e \; 17 - x \notin \langle S, 7 \rangle\} = \{ \quad \}$. Concluímos que $\langle S, 7 \rangle$ é simétrico, e portanto $S_{10} = \langle S, 7 \rangle = \langle 4, 7 \rangle$.

Então $S = \langle 4, 7 \rangle \cap \langle 4, 6, 9 \rangle \cap \langle 4, 10, 11, 13 \rangle$.

O método apresentado permite escrever alguns semigrupos numéricos como intersecção de semigrupos numéricos simétricos, contudo esta decomposição não é necessariamente minimal no sentido de envolver o menor número possível de semigrupos. De facto, o semigrupo estudado no exemplo anterior foi decomposto em três semigrupos numéricos simétricos utilizando este método, no entanto foi apresentado anteriormente como intersecção de apenas dois, $S = \langle 4, 7 \rangle \cap \langle 4, 5 \rangle$.

5.3 Decomposição em semigrupos numéricos pseudo-simétricos

À semelhança do estudo anterior, alguns semigrupos numéricos podem ser expressos como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos. Nesta secção caracterizamos esses semigrupos numéricos e exemplificamos um método para fazer a referida decomposição.

Vejamos quais os semigrupos numéricos que admitem uma decomposição em pseudo-simétricos. Começamos naturalmente por observar que uma condição necessária para que o semigrupo possa ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos é ter número de Frobenius par (Lema 5.14). No entanto, o número de Frobenius ser par não é uma condição suficiente para que esta decomposição exista, como veremos à frente.

Seja S um semigrupo numérico que admite uma decomposição em semigrupos numéricos pseudo-simétricos e $f_1, \dots, f_t$ os pseudo-números de Frobenius de S.

Vamos mostrar que para cada $f_i \in PF(S)$ existe um semigrupo pseudo-simétrico S_{f_i} que contém S, com $f_i \notin S_{f_i}$ e tal que $S = S_{f_1} \cap \ldots \cap S_{f_t}$. Observamos que, visto que F(S) é par, uma vez que estamos a considerar que S admite uma decomposição em pseudo-simétricos, o Lema 5.11 assegura a existência de um semigrupo numérico pseudo-simétrico $\bar{S}$ que contém S e tal que $F(\bar{S}) = F(S)$. É de notar ainda que $\frac{F(S)}{2} \notin \bar{S}$ e portanto $\bar{S}$ é um semigrupo numérico pseudo-simétrico que não contém $F(S)$ nem $\frac{F(S)}{2}$. Assim, neste estudo, vamos considerar $f_i \neq \frac{F(S)}{2}$.

O Teorema 5.22 permite caracterizar os semigrupos que podem ser expressos como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos.

Lema 5.21: Sejam S um semigrupo numérico e x um inteiro ímpar que não pertence a S, com $x \neq \frac{F(S)}{2}$. São equivalentes as condições seguintes:

1) Existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico $\bar{S}$ que contém S tal que $x \notin \bar{S}$.

2) Existe um inteiro positivo ímpar y tal que $x + y \notin \langle S, y \rangle$.

Dem. 1) *implica* 2) Consideremos o inteiro ímpar x que não pertence a *S*, tal que $x \neq \frac{F(\bar{S})}{2}$. Por hipótese, existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico $\bar{S}$ que contém S tal que $x \notin \bar{S}$, temos que $F(\bar{S})$ é par e $F(\bar{S}) - x \in \bar{S}$ (porque $F(\bar{S}) - x \neq \frac{F(\bar{S})}{2}$). Seja $y = F(\bar{S}) - x$. Então y é ímpar e $x + y = x + F(\bar{S}) - x \notin \bar{S}$. Além disso, dado que $\langle S, y \rangle \subseteq \bar{S}$, concluímos que $x + y \notin \langle \bar{S}, y \rangle$.

2) *implica* 1) Consideremos o inteiro ímpar x que não pertence a *S*, tal que $x \neq \frac{F(\bar{S})}{2}$, e o inteiro positivo ímpar y tal que $x + y$ não pertence a $\langle S, y \rangle$. Então existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico $\bar{S}$ que contém $\langle S, y \rangle$ e contém S, tal que $F(\bar{S}) = x + y$ (note-se que $x + y$ é par, donde a existência de $\bar{S}$ está garantida pelo Lema 5.11). Por último, verificamos que $x \notin \bar{S}$, caso contrário $x + y \in \bar{S}$, o que é impossível atendendo a que $x + y = F(\bar{S})$. □

Teorema 5.22: Seja S um semigrupo numérico e $f_1, \ldots, f_t$ os pseudo-números de Frobenius de S. Então S pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos se e só se para cada pseudo-número de Frobenius ímpar, f_i, de S, com $f_i \neq \frac{F(S)}{2}$, existe um inteiro ímpar y_i tal que $f_i + y_i \notin \langle S, y_i \rangle$.

Dem. *Condição necessária.* Sejam $S_1, \dots, S_n$ semigrupos numéricos pseudo-simétricos tais que $S = S_1 \cap \dots \cap S_n$. Seja $f_i \in PF(S)$, tal que $f_i \neq \frac{F(S)}{2}$. Temos que $f_i \notin S_1 \cap \dots \cap S_n$, donde $f_i \notin S_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ e $S \subset S_j$. Utilizando o Lema 5.21, concluímos que existe um inteiro ímpar y_i tal que $f_i + y_i \notin \langle S, y_i \rangle$.

Condição suficiente. Seja S um semigrupo numérico, $PF(S) = \{f_1, \dots, f_t\}$ e suponhamos que $f_1 = F(S)$. Mostremos que para cada $f_i \in PF(S)$, existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S_{f_i} que contém S tal que $f_i \notin S_{f_i}$. Seja $f_i \in PF(S)$. Se f_i é par, consideramos o semigrupo numérico pseudo-simétrico S_{f_i} que contém S e com $F(S_{f_i}) = f_i$, cuja existência é garantida pelo Lema 5.11. Se f_i é ímpar e $f_i \neq \frac{F(S)}{2}$, tem-se que o inteiro par $f_i + y_i \notin \langle S, y_i \rangle$, para algum inteiro ímpar y_i. Então o Lema 5.11 garante a existência de um semigrupo numérico pseudo-simétrico S_{f_i} que contém $\langle S, y_i \rangle$ com número de Frobenius $f_i + y_i$. O semigrupo numérico S_{f_i} contém S visto que $S \subset \langle S, y_i \rangle$. Observamos que se existir $k \in \{2, \dots, t\}$ tal que $f_k = \frac{F(S)}{2}$, tem-se $f_k \notin S_{f_1}$. Assim, $S_{f_k} = S_{f_1}$.

Mostremos que $S = S_1 \cap \dots \cap S_t$. É claro que $S \subseteq S_{f_1} \cap \dots \cap S_{f_t}$, portanto basta provar que $S_{f_1} \cap \dots \cap S_{f_t} \subseteq S$. Seja $x \notin S$, mostremos que $x \notin S_{f_1} \cap \dots \cap S_{f_t}$. Dado que $x \notin S$, a Proposição 1.22 assegura que existe um pseudo-número de Frobenius f_i tal que $f_i - x \in S$ e, por consequência, $f_i - x \in S_{f_1} \cap \dots \cap S_{f_t}$. Temos que $f_i - x \in S_{f_j}$, para todo o $j \in \{1, \dots, t\}$, em particular, $f_i - x \in S_{f_i}$. Dado que $f_i \notin S_{f_i}$ concluímos que $x \notin S_{f_i}$, utilizando novamente a Proposição 1.22, e portanto $x \notin S_{f_1} \cap \dots \cap S_{f_t}$. Logo $S = S_1 \cap \dots \cap S_t$. □

Corolário 5.23: Seja S um semigrupo numérico. Se todos os pseudo-números de Frobenius de S são pares, então S pode ser escrito como intersecção finita de semigrupos numéricos pseudo-simétricos.

O recíproco desta propriedade nem sempre é verdadeiro, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 5.24: Verificamos facilmente que os semigrupos numéricos $\langle 5, 6, 13 \rangle$ e $\langle 6, 7, 17 \rangle$ são pseudo-simétricos. Seja $S = \langle 5, 6, 13 \rangle \cap \langle 6, 7, 17 \rangle = \langle 6, 13, 17, 20, 21, 28 \rangle$. Obtemos $Ap(S, 6) = \{0, 13, 17, 20, 21, 28\}$ e $PF(S) = \{7, 11, 14, 15, 22\}$. Verificamos que o semigrupo S pode ser escrito como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos e, no entanto, S tem dois pseudo-números de Frobenius ímpares diferentes de $\frac{F(S)}{2}$.

Vejamos em seguida um método para escrever um semigrupo numérico como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos: a cada um dos t pseudo-números de Frobenius de S, diferentes de $\frac{F(S)}{2}$, associamos um semigrupo numérico com número de Frobenius par (f_i, se f_i é par, ou $f_i + y_i$, com y_i ímpar, se f_i é ímpar). Em seguida determinamos um semigrupo numérico pseudo-simétrico S_{f_i} que contém esse semigrupo numérico e que tem o mesmo número de Frobenius. O semigrupo numérico S é a intersecção dos semigrupos numéricos pseudo-simétricos obtidos. Vejamos como é que se constroem estes semigrupos numéricos pseudo-simétricos.

Seja S um semigrupo numérico com número de Frobenius par. Vamos considerar que o semigrupo numérico em causa não é pseudo-simétrico, uma vez que se o for a decomposição é trivial. Utilizando o Lema 4.2, podemos construir um semigrupo numérico com o mesmo número de Frobenius de S e que contêm S. De facto, basta tomar $h = máx\ \left\{x \in \mathbb{N}\ | x \notin S, x \neq \frac{F(S)}{2}\ e\ F(S) - x \notin S\right\}$. O conjunto $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico e $F(S \cup \{h\}) = F(S)$. Repetindo este procedimento com o semigrupo numérico que se obtém, podemos construir uma sequência de semigrupos numéricos que contêm o semigrupo numérico S e que têm o mesmo número de Frobenius de S:

$S^0 = S$,

$S^{j+1} = S^j \cup \{h_j\}$ com $h_j = máx\ \left\{x \in \mathbb{N}|\ x \notin S^j,\ x \neq \frac{F(S)}{2}\quad e F(S) - x \notin S^j\right\}$.

Esta sequência vai ser finita, uma vez que o complementar de S em $\mathbb{N}$ é finito. Assim, existe um inteiro r tal que $\left\{x \in \mathbb{N}|\ x \notin S^r, x \neq \frac{F(S)}{2}\quad eF(S) - x \notin S^r\right\} = \emptyset$. O semigrupo numérico S^r que se obtém na última etapa é pseudo-simétrico, por construção, contém S e tem o mesmo número de Frobenius que S, $F(S^r) = F(S)$.

Vamos agora apresentar um exemplo para ilustrar o método aqui sugerido.

Exemplo 5.25: Consideremos o semigrupo numérico $S = \langle 6, 13, 17, 20, 21, 28 \rangle$. Temos que $S = \{0, 6, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 21\} \cup \{x \geq 23\}$, donde $F(S) = 22$.

Escrevamos S como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos. Começamos por determinar $PF(S) \backslash \left\{\frac{F(S)}{2}\right\} = \{7, 11, 14, 15, 22\} \backslash \{11\} = \{7, 14, 15, 22\}$.

Sabemos que S pode ser expresso como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos (Exemplo 5.24). Se não tivéssemos esta informação, teríamos de averiguar se S satisfaz as condições do Teorema 5.22. De facto, o semigrupo numérico S satisfaz essas condições, visto que $7 + 15 \notin \langle S, 15\rangle$ e $15 + 7 \notin \langle S, 7\rangle$. Pela demonstração do Teorema 5.22, concluímos que para cada $f_i \in PF(S)\backslash\left\{\frac{F(S)}{2}\right\}$ existe um semigrupo numérico pseudo-simétrico S_{f_i} que contém S e tal que $S = \bigcap_{f_i \in PF(S)} S_{f_i}$, ou seja, $S = S_7 \cap S_{14} \cap S_{15} \cap S_{22}$.

Vejamos quais são e como se obtêm os semigrupos da decomposição:

S_{22} é um semigrupo numérico pseudo-simétrico que contém S tal que $F(S_{22}) = 22$, então S_{22} contém $S' = S \cup \{x \geq 23\} = S$. Sabemos que S' é maximal no conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius igual a 22. A existência deste semigrupo numérico é garantida pelo Lema 5.11 e a sua construção pode fazer-se recorrendo ao Lema 4.2 e à sequência referida antes deste exemplo. Começamos por determinar as falhas de S, $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 22\}$, e em seguida construímos a sequência de semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius de S e que contêm S:

$S^0 = S,$

$S^1 = S^0 \cup \{h_0\}$, com $h_0 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^0, x \neq 11 \ e\ 22 - x \notin S^0\} = 15$, então $S^1 = S \cup \{15\}$.

$S^2 = S^1 \cup \{h_1\}$, com $h_1 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^1, x \neq 11 \ e\ 22 - x \notin S^1\} = 14$, então $S^1 = S \cup \{14, 15\}$.

O conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^2, x \neq 11 \ e\ 22 - x \notin S^2\}$ é vazio. Concluímos que S^2 é pseudo-simétrico, e portanto $S_{22} = S^2$.

Então $S_{22} = S \cup \{14, 15\} = \langle 6, 13, 14, 15, 17 \rangle$.

S_{14} é um semigrupo numérico pseudo-simétrico que contém S e cujo número de Frobenius é 14. Então S_{14} contém $S' = S \cup \{x \geq 15\} = \{0, 6, 12, 13, 16, \rightarrow\}$. A construção de S_{14} pode fazer-se recorrendo novamente ao Lema 4.2. Construímos a sequência de semigrupos numéricos com o mesmo número de Frobenius de S' e que contêm S':

$S^0 = S',$

$S^1 = S^0 \cup \{h_0\}$ com $h_0 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^0, x \neq 7\ e\ 14 - x \notin S^0\} = 11$, donde $S^1 = S' \cup \{11\}$

$S^2 = S^1 \cup \{h_1\}$ com $h_1 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^1, x \neq 7 \;\; e \; 14 - x \notin S^1\} = 10$, donde $S^1 = S' \cup \{10, 11\}$.

$S^3 = S^2 \cup \{h_2\}$ com $h_2 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^2, x \neq 7 \;\; e \; 14 - x \notin S^2\} = 9$, donde $S^1 = S' \cup \{9, 10, 11\}$.

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^3, x \neq 7 \;\; e \; 14 - x \notin S^3\} = \{ \;\; \}$, e portanto S^3 é pseudo-simétrico.

Então $S_{14} = S^3 = \langle\, 6, 9, 10, 11, 13 \,\rangle$.

S_7 é um semigrupo numérico pseudo-simétrico que contém $\langle S, 15\rangle$, e contém S, cujo número de Frobenius é 22, ou seja, S_{10} contém $S' = \langle S, 15\rangle \cup \{x \geq 23\} = S \cup \{15\}$.

$S^0 = S'$,

$S^1 = S^0 \cup \{h_0\}$, com $h_0 = máx\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^0, x \neq 11 \;\; e \; 22 - x \notin S^0\} = 14$, logo $S^1 = S' \cup \{14\}$.

O conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S^1, x \neq 11 \;\; e \; 22 - x \notin S^1\}$ é vazio, o que permite concluir que S^1 é pseudo-simétrico, donde $S_7 = S^1 = S_{22}$.

Então, $S_7 = S \cup \{14, 15\} = \langle\, 6, 13, 14, 15, 17 \,\rangle$.

Por último, o semigrupo numérico S_{15} é um semigrupo numérico pseudo-simétrico que contém $\langle S, 7\rangle$, e contém S, cujo número de Frobenius é 22, ou seja, S_{15} contém $\langle S, 7\rangle \cup \{x \geq 23\} = \langle S, 7 \,\rangle = \{\, 0, 6, 7, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21\} \cup \{x \geq 23\}$. Portanto $\{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \langle S, 7 \,\rangle, \; x \neq 11 \;\; e \;\; 22 - x \notin \langle S, 7 \,\rangle\} = \{ \;\; \}$. Concluímos, assim, que $\langle S, 7 \,\rangle$ é pseudo-simétrico, donde $S_{15} = \langle S, 7\rangle = \langle 6, 7, 17\rangle$.

Logo $S = \langle 6, 13, 14, 15, 17\rangle \cap \langle\, 6, 7, 17 \,\rangle \cap \langle\, 6, 9, 10, 11, 13\rangle$.

O método apresentado permite escrever alguns semigrupos numéricos como intersecção de semigrupos numéricos pseudo-simétricos, contudo esta decomposição não é necessariamente minimal, no sentido de envolver o menor número possível de semigrupos. De facto, o semigrupo estudado no exemplo anterior foi decomposto em três semigrupos numéricos pseudo-simétricos utilizando este método, no entanto foi apresentado no Exemplo 5.24 como intersecção de apenas dois, $S = \langle\, 5, 6, 13 \,\rangle \cap \langle 6, 7, 17\rangle$.

Capítulo 6

Limite superior para o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico irredutível

Em consequência de alguns resultados apresentados no capítulo 4, vamos neste capítulo estabelecer uma quota para o cardinal de uma apresentação minimal para os semigrupos numéricos irredutíveis, em termos da sua multiplicidade e da sua dimensão de imersão, que apura a quota anteriormente estabelecida no Teorema 3.12. Notamos que iremos considerar $e(S) \geq 4$, uma vez que os casos em que $e(S) \leq 3$ foram estudados em detalhe nas secções 2.2 e 4.2.

Estudemos, em primeiro lugar, os semigrupos numéricos simétricos.

Lema 6.1: Seja S um semigrupo numérico **simétrico** e $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o seu sistema minimal de geradores. Seja $n \in \{F(S) + n_1 + n_2, \dots, F(S) + n_1 + n_p\}$. Então G_n é conexo ou $p = 2$.

Dem: Seja $n = F(S) + n_1 + n_i$, com $i \in \{2, \dots, p\}$. Observemos que para todo o $j \in \{2, \dots, p\}$, com $i \neq j$, tem-se que $n - (n_i + n_j) = F(S) + n_1 + n_i - (n_i + n_j) = F(S) + n_1 - n_j = w(n_1 - 1) - n_j \in Ap(S, n_1)$, pela Proposição 4.7. Então os vértices $n_{2,}, \dots, n_p$ pertencem à mesma componente conexa. Concluímos que G_n é não conexo se e só se n_1 for o único vértice de uma componente conexa, ou seja, se $n = kn_1$.

Vejamos que a situação anterior ocorre quando $p = 2$. Comecemos por mostrar que $w + n_i \in Ap(S, n_1)$, para todo o $w \in Ap(S, n_1)$, tal que $w \neq w(n_1 - 1)$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $w + n_i \notin Ap(S, n_1)$. Neste caso, $w + n_i = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_p n_p$, com $a_1 > 0$. Por outro lado, uma vez que S é simétrico, existe $w' \in Ap(S, n_1)$ tal que $w + w' = w(n_1 - 1)$. Dado que $w' = d_2 n_2 + \dots + d_p n_p$, obtém-se $w + w' + n_i = a_1 n_1 + (a_2 + d_2) n_2 + \dots + (a_p + d_p) n_p = w(n_1 - 1) + n_i$, ou seja, $kn_1 = a_1 n_1 + (a_2 + d_2) n_2 + \dots + (a_p + d_p) n_p$, e portanto $k = a_1$ e $a_2 = d_2 = 0, \dots, a_p = d_p = 0$. Concluímos que $w' = 0$ e $w = w(n_1 - 1)$. Então $w + n_i \in Ap(S, n_1)$, para todo o $w \in Ap(S, n_1)$, tal que $w \neq w(n_1 - 1)$. Por último, dado que $w(0) + n_i = w(1) \in Ap(S, n_1)$, $w(1) + n_i = w(2) \in Ap(S, n_1)$, ... e $w(n_1 - 2) + n_i =$

$w(n_1-1) \in Ap(S,n_1)$, obtém-se que $\mathrm{Ap}(S,n_1)=\{0,n_1,2n_1,\ldots,(n_1-2)\,n_1\}$, logo $S=\langle n_1,\ n_2\rangle$. □

Vejamos qual é o limite superior para o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico simétrico S com o maior número possível de geradores minimais, i. é, $e(S)=m(S)-1$.

Teorema 6.2: Seja S um semigrupo numérico **simétrico** e o seu sistema de geradores $\{n_1<n_2<\ \ldots<n_{n_1-1}\}$, com $n_1\geq 4$. Então o cardinal de uma apresentação minimal para S é igual a

$$\frac{(n_1-2)(n_1-1)}{2}-1.$$

Dem: S é simétrico logo

$$\mathrm{Ap}(\mathrm{S},\mathrm{n}_1)=\{0,\mathrm{w}(1)=\mathrm{n}_2,\ldots\mathrm{w}(\mathrm{n}_1-2)=\mathrm{n}_{\mathrm{n}_1-1},\mathrm{w}(\mathrm{n}_1-1)\},$$

com $\mathrm{w(i)}+\mathrm{w}(\mathrm{n}_{\mathrm{n}_1-1-\mathrm{i}})=\mathrm{w}(\mathrm{n}_1-1)$, qualquer que seja $\mathrm{i}\in\{0,\ldots,\mathrm{n}_1-1\}$. Então $\mathrm{Ap}(\mathrm{S},\mathrm{n}_1)=\{0,\ \mathrm{n}_2,\ldots,\mathrm{n}_{\mathrm{n}_1-1},\ \mathrm{n}_2+\ \mathrm{n}_{\mathrm{n}_1-1}\}$. Sabemos que G_n é não conexo se $\mathrm{n}=\mathrm{w}+\mathrm{n}_\mathrm{i}$, com $\mathrm{w}\in(\mathrm{Ap}(\mathrm{S},\mathrm{n}_1)\setminus\{0\})$ e $\mathrm{n_i}\in\{\mathrm{n}_2,\ldots,\mathrm{n}_{\mathrm{n}_1}\}$. No entanto, pelo Lema 6.1, concluímos que se $\mathrm{n}=\mathrm{w}(\mathrm{n}_1-1)+\mathrm{n_j}$, com $\mathrm{j}\in\{2,\ldots,\mathrm{n}_1-1\}$, então G_n é conexo.

Logo, G_n é não conexo se $n=n_i+n_j$, com $i,j\in\{2,\ldots,n_1-1\}$. Neste caso, pode ter-se $n_i+n_j=w(n_1-1)\in Ap(S,n_1)$ ou $n_i+n_j\notin Ap(S,n_1)$. Assim, para obtermos uma relação mínima para S, temos de estudar os grafos $G_{w(n_1-1)}$ e $G_{n_i+n_j}$ em que $n_i+n_j\notin Ap(S,n_1)$.

No primeiro caso, tem-se que $w(n_1-1)=n_2+n_{n_1-1}=n_3+n_{n_1-2}=\cdots=n_i+n_j$, com $n_i+n_j=w(n_1-1)$. Logo, se n_1 é par, $G_{w(n_1-1)}$ tem $\frac{n_1-2}{2}$ componentes conexas todas com um só lado da forma $\overline{n_in_j}$, e se se n_1 é ímpar, $G_{w(n_1-1)}$ tem $\frac{n_1-1}{2}$ componentes conexas, uma destas apenas com o vértice n_1 e as restantes com um só lado da forma $\overline{n_in_j}$. Assim, uma relação mínima para S terá $\frac{n_1-1}{2}-1$ ou $\frac{n_1-2}{2}-1$ elementos associados a este grafo.

No segundo caso, dado que $n_i+n_j\notin Ap(S,n_1)$, tem-se que $n_i+n_j-n_1\in S$ e portanto $n_i+n_j=a_1n_1+s$, com $s\in S$. Assim, $\overline{n_in_j}$ é uma aresta desta componente conexa e n_1 é um vértice deste grafo mas pertence a outra componente conexa, uma vez que $n_i+n_j-(n_1+n_j)=n_i-n_1\notin S$. Logo o número de elementos de uma relação mínima para S associados a estes grafos é igual ao número de pares não ordenados da forma (n_i,n_j), em que $n_i+n_j\neq w(n_1-1)$.

Portanto, uma relação mínima para S tem tantos elementos quantos os pares, não ordenados, da forma (n_i, n_j), com $i, j \in \{2, \dots, n_1 - 1\}$, menos um, ou seja,

$$\# \, RMS = \frac{(n_1-2)(n_1-3)}{2} + (n_1 - 2) - 1 = \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{2} - 1.$$

□

Vejamos um exemplo de aplicação da propriedade anterior.

Exemplo 6.3: Seja $S = \langle 6, 8, 10, 13, 15 \rangle$. Tem-se $F(S) = 17$ e $Ap(S, 6) = \{0, 8, 10, 13, 15, 23\}$. Verificamos que S é simétrico e tem máxima dimensão de imersão ($e(S) = m(S) - 1$), donde, aplicando o teorema anterior, obtemos $\# \, RMS = \frac{4\times 5}{2} - 1 = 9$. Confirmemos este resultado.

Sabemos que se G_n é não conexo então $n \in \{16, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30\}$. Temos que

$$16 = 2 \times 8 = 10 + 6$$

$$18 = 6 \times 3 = 8 + 10$$

$$20 = 2 \times 6 + 8 = 2 \times 10$$

$$21 = 6 + 15 = 8 + 13$$

$$23 = 8 + 15 = 10 + 13$$

$$25 = 10 + 15 = 2 \times 6 + 13$$

$$26 = 6 + 2 \times 10 = 2 \times 13$$

$$28 = 3 \times 6 + 10 = 13 + 15$$

$$30 = 5 \times 6 = 3 \times 10 = 2 \times 15 = 2 \times 6 + 8 + 10$$

Concluímos que, qualquer que seja $n \in \{16, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 28, 30\}$, G_n é não conexo e que cada um destes nove grafos tem apenas duas componentes conexas. Logo o cardinal de uma apresentação minimal para S é igual a 9.

O resultado seguinte dá-nos um limite superior para o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico simétrico que apura a quota anteriormente estabelecida no Teorema 3.12.

Teorema 6.4: Seja S um semigrupo numérico **simétrico**, com sistema minimal de geradores $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$, tal que $p \geq 3$. Então o cardinal de uma apresentação minimal para S é menor ou igual a

$$\frac{(n_1-2)(n_1-1)}{2} - (n_1 - p).$$

Dem: Uma vez que S é simétrico, $F(S) + n_1$ não é gerador minimal de S, logo $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\} \cup \{F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores de $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$. Então, podemos escrever uma apresentação minimal para $\bar{S}$ a partir de apresentação para S, uma vez que sabemos que podemos ganhar $p+1$ relações e perder até $p-1$ relações. Neste caso não se perdem relações dado que os grafos correspondentes a $F(S) + n_1 + n_2$, ..., $F(S) + n_1 + n_p$ são todos conexos $(p > 2)$. Donde, $\# RMS + p + 1 = \# RM\bar{S}$. Além disso, sabemos que uma apresentação minimal para o semigrupo numérico $\bar{S} = \langle n_1, \dots, n_p, F(S) \rangle$ verifica

$$\# RM\bar{S} \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} - 2(n_1 - (p+1),$$

portanto

$$\# RMS \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} - 2(n_1 - 1 - p) - (p+1) =$$

$$= \frac{n_1(n_1-1)}{2} - (n_1 - 1) - (n_1 - 1 - 2p) - p - 1 = \frac{(n_1-2)(n_1-1)}{2} - (n_1 - p)\,.$$

□

Observemos que se o semigrupo numérico atinge o limite máximo deste cardinal isso implica que $n_1 - p$ assuma o valor mínimo, ou seja, $e(S) = m(S) - 1$.

Corolário 6.5: Seja S um semigrupo numérico **simétrico**, com sistema minimal de geradores $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$, tal que $p \geq 3$. Então

$$e(S) = m(S) - 1 \text{ se e só se } \# RMS = \frac{(n_1-2)(n_1-1)}{2} - 1.$$

Estudemos, em seguida, os semigrupos numéricos pseudo-simétricos. Observemos em primeiro lugar que se S é um semigrupo numérico pseudo-simétrico e $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ é um sistema minimal de geradores de S, com $p \geq 4$, então $\{n_1, n_2, \dots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores de $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$. De facto, $n_p \neq F(S) + n_1$, uma vez que de outra forma ter-se-ia $n_p = n_k + n_j$.

O seguinte resultado é estabelecido a partir do Lema 3.5.

Proposição 6.6: Seja um semigrupo numérico pseudo-simétrico, com $p \geq 4$. Se $\{n_1, n_2, \ldots, n_p, F(S)\}$ é um sistema minimal de geradores de $\bar{S} = S \cup \{F(S)\}$ e $n = F(S) + n_1 + n_i$, com $i \in \{2, \ldots, p\}$, e n_1 e n_i pertencem à mesma componente conexa de G_n, então

$$\# RMS + p + 1 = \# RM\bar{S}.$$

Lema 6.7: Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico e o seu sistema minimal de geradores $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_p\}$, com $p \geq 4$. Se $i \in \{2, \ldots, p\}$, $w \in Ap(S, n_1)$ e n_1 e n_i estão em diferentes componentes conexas de G_{w+n_i}, então para todo o $w' \in Ap(S, n_1)$, tal que $w - w' \in Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$, temos que $w' + n_i \in Ap(S, n_1)$.

Dem. Suponhamos que $w' + n_i \notin Ap(S, n_1)$. Então $w' + n_i - n_1 \in S$. Uma vez que $w - w' \in S \setminus \{0\}$, existe $j \in \{2, \ldots, p\}$ tal que $w = w' + n_j + s$, com $s \in S$. Assim, $w + n_i - (n_i + n_j) \in S$. Por outro lado, $w + n_i - (n_j + n_1) = w' + s + n_i - n_j - n_1 = w' + n_i - n_1 + s - n_j \in S$, porque $w' + n_i - n_1 \in S$ e $s - n_j \in S$. Donde $\overline{n_i n_1}$ e $\overline{n_i n_j} \in E_n$ e portanto n_1 e n_i estão na mesma componente conexa $G_{w'+n_i}$. Logo $w' + n_i \in Ap(S, n_1)$. □

Lema 6.8: Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico e o seu sistema minimal de geradores $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_p\}$, com $p \geq 4$. Se $n = F(S) + n_1 + n_i$, com $i \in \{2, \ldots, p\}$, então n_1 e n_i pertencem à mesma componente conexa de G_n.

Dem. O semigrupo numérico S é pseudo-simétrico, então $Ap(S, n_1) = \{0, w(1) < w(2) < \ldots w(n_1 - 2) = F(S) + n_1)\} \cup \left\{\frac{F(S)}{2} + n_1\right\}$, com $w(i) + w(n_1 - 2 - i) = w(n_1 - 2)$, qualquer que seja $i \in \{0, \ldots, n_1 - 2\}$. Suponhamos que $n = F(S) + n_1 + n_i$, com $i \in \{2, \ldots, p\}$ e que n_1 e n_i pertencem a componentes conexas distintas de $G_{F(S)+n_1+n_i}$. Seja $j \in \{2, \ldots, p\}$ tal que $n_j \neq \frac{F(S)}{2} + n_1$ e $n_i \neq n_j$ (a existência de n_j nestas condições está assegurada, uma vez que $p \geq 4$, portanto $Ap(S, n_1)$ tem pelo menos três elementos que são geradores minimais). Dado que $F(S) + n_1 - n_j \in Ap(S, n_1)$, pela Proposição 4.11, concluímos que $F(S) + n_1 - n_j + n_i \in Ap(S, n_1)$, utilizando o Lema 6.7. Notemos que $F(S) + n_1 - n_j + n_i = \frac{F(S)}{2} + n_1$. Caso contrário, utilizando a Proposição 4.11, obtemos $F(S) + n_1 - [F(S) + n_1 + n_i - n_j] \in Ap(S, n_1)$, ou seja, $n_j - n_i \in S$, o que é impossível, visto que $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ é um sistema minimal de geradores de S. Observemos ainda que $n_i \neq \frac{F(S)}{2} + n_1$. De facto, dado que $(F(S)+n_1)-n_j+n_i=\frac{F(S)}{2}+n_1$, se $n_i=\frac{F(S)}{2}+n_1$, obtemos $n_j=F(S)+n_1$ e portanto $S=\langle n_1, \frac{F(S)}{2}+n_1, F(S)+n_1\rangle$, o que contradiz a hipótese : $p\geq 4$. Agora vamos distinguir dois casos conforme $\frac{F(S)}{2}+n_1$ é ou não gerador minimal de S.

1) Se $\frac{F(S)}{2}+n_1\in\{n_1,n_2,\dots,n_p\}$, obtemos que

$$w(0)+n_i=w(1), w(1)+n_i=w(2),\dots,w(n_1-3)+n_i=F(S)+n.$$

Assim, $Ap(S,n_1)=\{0,\ n_i,2n_i,\dots,(n_1-2)n_i\}\cup\left\{\frac{F(S)}{2}+n_1\right\}$, donde $S=\langle n_1,n_i,\ \frac{F(S)}{2}+n_1\rangle$, o que é impossível uma vez que, por hipótese, $p\geq 4$.

2) Se $\frac{F(S)}{2}+n_1\notin\{n_1,n_2,\dots,n_p\}$, obtemos que

$$Ap(S,n_1)=\left\{0,n_i,2n_i,\dots,kn_i=\frac{F(S)}{2}+n_1,\ n_j,n_j+n_i,\dots,\ n_j+tn_i=\ F(S)+n\right\},$$

donde $S=\langle n_1,n_i,\ n_j\rangle$ e $p=3$, o que contradiz a hipótese.

Então n_1 e n_i pertencem à mesma componente conexa de $G_{F(S)+n_1+n_i}$. □

Podemos agora apresentar uma quota para o cardinal de uma apresentação minimal para um semigrupo numérico pseudo-simétrico.

Teorema 6.9: Seja S um semigrupo numérico pseudo-simétrico e o seu sistema minimal de geradores $\{n_1<n_2<\dots<n_p\}$, com $p\geq 4$. Então o cardinal de uma apresentação minimal para S é menor ou igual a

$$\frac{(n_1-2)(n_1-1)}{2}-(n_1-p).$$

Dem. Pela Proposição 6.6, temos que $\#\,RMS+p+1=\#\,RM\bar{S}$. Além disso, sabemos, pelo Teorema 3.12, que uma apresentação minimal para o semigrupo numérico $\bar{S}=\langle n_1,\dots,n_p,F(S)\rangle$ verifica

$$\#\,RM\bar{S}\leq\frac{n_1(n_1-1)}{2}-2(n_1-(p+1)),$$

portanto

$$\#\,RMS\leq\frac{n_1(n_1-1)}{2}-2n_1+2(p+1)-(p+1)=$$

$$\frac{n_1(n_1-1)}{2}-2n_1+(p+1)=$$

$$=\frac{n_1(n_1-1)}{2}-(n_1-1)-n_1-1+p+1.$$

Logo

$$\# RMS \leq \frac{(n_1-2)(n_1-1)}{2} - (n_1 - p).$$

□

Podemos, agora, generalizar o resultado anterior aos semigrupos numéricos irredutíveis com dimensão de imersão maior ou igual a quatro.

Teorema 6.10: Seja S um semigrupo numérico irredutível com $e(S) \geq 4$. Então, o cardinal de uma apresentação minimal para S é menor ou igual a

$$\frac{(m(S)-2)(m(S)-1)}{2} - (m(S) - e(S)).$$

Índice de Notações

$\mathbb{N}$ - conjunto dos inteiros não negativos, pág. 6

$\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$- sistema de geradores do semigrupo numérico, pág. 12

$N(S)$- conjuntos dos elementos do semigrupo numérico S que são menores do que F(S), pág. 14

$n(S)$- cardinal de $N(S)$, pág. 14

$Ncc(G_n)$- número de componentes conexas do grafo G_n, pág. 33

$\overline{n_k n_t}$ - aresta com vértices n_k e n_t, pág. 24

n_ω - número de ω – classes contidas em $[n]$, pág. 21

$O(S)$- conjunto dos semigrupos numéricos que contêm S, pág. 67

$PF(S)$ - conjunto dos pseudo-números de Frobenius de S, pág. 14

$\# RMS$- cardinal de uma apresentação minimal para S, pág. 31

$S(F)$-conjunto dos semigrupos numéricos com número de Frobenius F, pág. 73

$\langle S, y\rangle$ - semigrupo numérico gerado por $S \cup \{y\}$, pág. 73

$t(S)$- cardinal de $PF(S)$, pág. 14

V_n- conjunto dos vértices do grafo G_n, 24

$X_1, X_2, \dots, X_r$ - as distintas ω – classes contidas em $[n]$, 21

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos inteiros, 14

$F/_\sigma$ - conjunto quociente de F por σ, pág. 4

$\{x_1, x_{2,}, \dots, x_k, \rightarrow\} = \{x_1, x_{2,}, \dots, x_k,\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x > x_k\}$, pág. 10

$a \leq_S b$ - relação de ordem definida no conjunto dos inteiros, pág. 15

ρ - apresentação minimal para o semigrupo numérico, pág. 27

$\bar{\rho}$ - congruência gerada por ρ, pág. 5

ω - relação que define as ω-classes das expressões de um dado elemento num semigrupo numérico, pág. 20

Bibliografia

[1] R. Apéry, *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **222** (1946), 1198-2000.

[2] Arf C., *Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique*, Proc. London Math. Soc., **20** (1949), 256-287.

[3] V. Barucci, D. E. Dobbs and Fontana, *Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., **598** (1997).

[4] M. B. Branco, *Numerical semigroups*, Tese de Doutoramento, Universidade de Évora, Portugal, 2002.

[5] H. Bresinsky, *On prime Ideals with Generic zero* $x_i = t^n i$, Proceedings of American Mathematical Society, **47** (1975), no.3, 329-332.

[6] M. Delgado, P. A. Garcia-Sánchez, J. Morais, *"numericalsgps": a GAP package on numerical semigroups.* (http://www.gap-system.org/Packages/numericalsgps.html).

[7] R. Froberg, C. Gottlieb, R. Haggkvist, *On numerical semigroups*, Semigroup Forum, **35** (1987), 63-83.

[8] R. Gilmer, *Commutative semigroup rings*, The University of Chicago Press, 1984.

[9] J. Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings*, Manuscripta Math, **3** (1970), 175-193.

[10] J. L. Ramirez Alfonsin, *The Diophantin Frobenius Problem*, Oxford University Press, 2005.

[11] J. C. Rosales, *Semigrupos numéricos*, Tese de doutoramento, Universidade de Granada, Espanha, 2001.

[12] J. C. Rosales, *On Numerical Semigroups*, Semigroup Forum, **52** (1996), 307-318.

[13] J. C. Rosales, *On symmetric numerical semigroups*, J. Algebra, **182** (1996), no. 0178, 422-434.

[14] J. C. Rosales, M. B. Branco, *Irreducible numerical semigroups*, Pacific J. Math., **209** (2003), 131-143.

[15] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García- García and M. B. Branco, *Numerical Semigroups with monotonic Apéry*, Czechoslovak Math J, **55** (2005), no.3, 755-772.

[16] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García- García, J. A. Jiménez-Madrid*, The oversemigroups of a numerical semigroup* , Semigroup Forum, **67** (2003), 145-158.

[17] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, New York, 1999.

[18] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, *Numerical semigroups*, Springer, New York, 2009.

[19] E. S. Selmer and O. Beyer, *On linear diophantine problem of Frobenius*, Dissertation, Joh. Gutenberg-Universitad, Mainz, 1974.

[20] J. J. Sylvester, *Mathematical questions with their solutions*, Educacional Times, **41** (1884), 21.

[21] P. Vasco, *Proportionally modular Diophantine inequalities and quotients of a numerical semigroup*, Tese de Doutoramento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal (2009).